

Über Nullstellen der Heckeschen Zetafunktionen in algebraischen Zahlkörpern

INAUGURAL-DISSERTATION
zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften

vorgelegt dem Fachbereich Mathematik
der Philipps-Universität Marburg

von
Jürgen Hinz
aus Rostrup

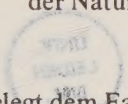
1975

Marburg/Lahn 1974



Über Nullstellen der Heckeschen Zetafunktionen in algebraischen Zahlkörpern

INAUGURAL-DISSERTATION
zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften



vorgelegt dem Fachbereich Mathematik
der Philipps-Universität Marburg

von
Jürgen Hinz
aus Rostrup

Marburg/Lahn 1974



Vom Fachbereich Mathematik

der Philipps-Universität Marburg/Lahn als

Dissertation angenommen : 8.1.1975

Tag der mündlichen Prüfung : 23.1.1975

Berichterstatter : Prof.Dr.W.Schaal

Mitberichterstatter : Prof.Dr.P.Schmidt

1. Einleitung, Formulierung der Ergebnisse	1
--	---

2. Elementare Mittelwertsätze für Polynome der Form	
---	--

$$\sum_{1 \leq N\alpha \leq N} c(\alpha) (N\alpha)^{-s} \quad 5$$

3. Allgemeine Mittelwertsätze für Dirichletsche Polynome	14
--	----

4. Erste Anwendungen	48
----------------------	----

5. Abschätzung für den Ausdruck	
---------------------------------	--

$$\sum_{Nq \leq Q} \sum_{\chi \bmod q}^* \sum_{l=1}^R |z_K(\frac{1}{2} + it_{\chi, l}, \chi)| \quad 51$$

6. Beweise der Hauptsätze; Abschätzungen für Summen der Form	
--	--

$$\sum_{Nq \leq Q} \sum_{\chi \bmod q}^* N(\sigma, T, \chi) \quad 63$$

7. Anhang	95
-----------	----

8. Literaturverzeichnis	99
-------------------------	----



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41552319_0089

1. Im Jahre 1969 bewies H.L. Montgomery [12] neue Abschätzungen für den Ausdruck

$$\sum_{q \leq Q} \sum_{\chi \bmod q}^* N(\sigma, T, \chi) \quad , \quad \sigma \geq \frac{1}{2} \quad , \quad T \geq 2 \quad , \quad Q \geq 1 \quad ,$$

wobei $\sum_{\chi \bmod q}^*$ die Summe über alle primitiven Charaktere χ

modulo q bezeichnet, und $N(\sigma, T, \chi)$ die Anzahl aller Nullstellen ρ der L-Funktion

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) \cdot n^{-s} \quad , \quad s = \sigma + it \quad ,$$

im Bereich $\sigma \leq \operatorname{Re} \rho \leq 1$ und $|\operatorname{Im} \rho| \leq T$ ist.

Mit Hilfe eines neuen Beweisverfahrens gelang es Montgomery, die bisher bekannten Abschätzungen z.B. von Bombieri zu verbessern.

Montgomery benutzte im wesentlichen gewisse Mittelwertsätze für Dirichletsche Polynome

$$\sum_{n=1}^N \chi(n) \cdot a_n \cdot n^{-s} \quad , \quad a_n \in \mathbb{C} \quad ,$$

die er mit einer Methode von Halász bewies [11] .

Er erhielt folgende Resultate:

$$(1.1) \quad \sum_{q \leq Q} \sum_{\chi \bmod q}^* N(\sigma, T, \chi) \ll (Q^2 T)^{\frac{3(1-\sigma)}{2-\sigma}} (\log QT)^{13} \quad \text{für } \frac{1}{2} \leq \sigma \leq \frac{4}{5} \quad ,$$

$$(1.2) \quad \sum_{q \leq Q} \sum_{\chi \bmod q}^* N(\sigma, T, \chi) \ll (Q^2 T)^{\frac{2(1-\sigma)}{\sigma}} (\log QT)^{13} \quad \text{für } \frac{4}{5} \leq \sigma \leq 1 \quad .$$

In der vorliegenden Arbeit sollen diese Untersuchungen auf algebraische Zahlkörper übertragen werden. *)

Dabei folge ich im wesentlichen der Beweismethode von Montgomery. Unter Benutzung eines Satzes von Bombieri (Lemma 3.1) kann man jedoch bei der Herleitung der Mittelwertsätze für Dirichletsche Polynome auf die Methode von Halász verzichten (vergl. auch [13]). Es ergeben sich dadurch Vereinfachungen in der Beweisführung.

Im folgenden sei K ein algebraischer Zahlkörper vom Grade n über dem Körper der rationalen Zahlen. Für ein ganzes Ideal α aus K bedeute $N\alpha$ seine Norm. Es sei χ ein Charakter der engeren Idealklassengruppe modulo einem festen Ideal $\mathfrak{q}$ aus K .

Die Heckesche Zetafunktion ist definiert für $\sigma = \operatorname{Re} s > 1$ durch

$$\zeta_K(s, \chi) = \sum_{\alpha} \chi(\alpha) (N\alpha)^{-s},$$

wobei über alle ganzen Ideale α aus K summiert wird.

$N(\sigma, T, \chi)$ bezeichne wie oben die Anzahl der Nullstellen $\rho = \beta + i\gamma$ von $\zeta_K(s, \chi)$ im Rechteck $\sigma \leq \beta \leq 1$, $|\gamma| \leq T$.

Es sollen Abschätzungen für den Ausdruck

$$\sum_{N\mathfrak{q} \leq Q} \sum_{\chi \bmod \mathfrak{q}}^* N(\sigma, T, \chi), \quad \sigma \geq \frac{1}{2}, \quad T \geq 2$$

angegeben werden. Dabei wird über alle ganzen Ideale $\mathfrak{q}$ aus K mit $N\mathfrak{q} \leq Q$ und alle primitiven Charaktere χ der engeren Idealklassengruppe modulo $\mathfrak{q}$ summiert.

*) Herrn Prof. Dr. W. Schaal, der dieses Thema anregte, danke ich für seine vielseitige Unterstützung.

Mit Hilfe der Beweismethode von Montgomery lassen sich unter anderem die folgenden Sätze herleiten:

Satz A : Es seien $Q \geq 1$, $T \geq 2$ reelle Zahlen.

Dann gilt

a) im Bereich $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1 - \frac{1}{2n}$, $n \geq 2$

$$\sum_{Nq \leq Q} \sum_{\chi \bmod q}^* N(\sigma, T, \chi) \ll \{Q^2 T^{\frac{2}{3}n(2-\sigma)} (\log QT)^{3n}\}^{\frac{3(1-\sigma)}{2-\sigma}} (\log QT)^{10}$$

b) im Bereich $1 - \frac{1}{2n} \leq \sigma \leq 1$, $n \geq 1$

$$\sum_{Nq \leq Q} \sum_{\chi \bmod q}^* N(\sigma, T, \chi) \ll \{Q^2 T^b (\log QT)^{3n}\}^{\frac{3(1-\sigma)}{2-\sigma}} (\log QT)^{10}$$

$$\text{mit } b = \frac{n+2}{3} + \frac{2}{3}(1-\frac{1}{n}) \cdot \frac{(n+1)\sigma-n}{4\sigma+\frac{\sigma}{n}-2-2\sigma^2} \leq n.$$

oder

$$\sum_{Nq \leq Q} \sum_{\chi \bmod q}^* N(\sigma, T, \chi) \ll T^{\frac{n+4}{3} - \frac{2}{3n} - b} \{Q^2 T^b (\log QT)^{3n}\}^{\frac{3(1-\sigma)}{2-\sigma}} \cdot (\log QT)^{10}$$

$$\text{mit } \frac{n}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3n} \leq b = \frac{(2-\sigma)(n-5+6\sigma+n^{-1})}{6\sigma-3} \leq \frac{n}{3} + \frac{5}{6} + \frac{1}{3n}, \quad n \geq 2$$

$$\text{und } \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leq \frac{n+4}{3} - \frac{2}{3n} - b \leq 1 - \frac{1}{n}, \quad n \geq 2.$$

Satz B : Es seien $Q \geq 1$, $T \geq 2$ reelle Zahlen.

Dann gilt im Bereich $\frac{3}{4} \leq \sigma \leq 1$, $n \geq 1$:

$$\sum_{Nq \leq Q} \sum_{\chi \bmod q}^* N(\sigma, T, \chi) \ll (Q^2 T^n)^{\frac{2(1-\sigma)}{\sigma}} (\log QT)^c,$$

$$\text{wobei } c = \max\left\{ \frac{4(\sigma+1)}{2\sigma-1}, \frac{3n-\sigma(3n-2)+7}{\sigma} \right\}.$$

Alle auftretenden $\ll$ -Konstanten hängen nur vom Körper K ab.

M.N. Huxley [4] veröffentlichte 1971 Abschätzungen für den Term

$$\sum_{Nq \leq Q} \frac{N(q)}{\Phi(q)} \sum_{\chi \bmod q}^* N'(\sigma + it, \lambda, \chi), \quad \sigma \geq \frac{1}{2}.$$

$N'(\sigma + it, \lambda, \chi)$ ist dabei die Anzahl der Nullstellen $\rho = \beta + i\gamma$ der Heckeschen Zetafunktion mit dem Größencharakter λ im Bereich $\sigma \leq \beta \leq 1$, $t \leq \gamma \leq t+1$.

Die Resultate der vorliegenden Arbeit lassen sich nicht unmittelbar mit den Ergebnissen von Huxley vergleichen, denn es werden hier größere Nullstellenbereiche betrachtet.

Summiert man jedoch bei Huxley über die Nullstellenbereiche, dann ergibt sich z.B. die Abschätzung:

$$\sum_{Nq \leq Q} \frac{N(q)}{\Phi(q)} \sum_{\chi \bmod q}^* N(\sigma, T, \chi) \ll T(Q^2 + Q^{\frac{5}{3}} T^{\frac{n}{3}})^{\frac{3(1-\sigma)}{2-\sigma}} (\log QT)^{4-2\sigma}.$$

Die auftretende $\ll$ -Konstante hängt nur vom Körper K ab.

2. Zunächst sollen, der Arbeit von Montgomery [11] folgend, Mittelwertsätze für Dirichletsche Polynome in algebraischen Zahlkörpern bewiesen werden.

Im Körper der rationalen Zahlen lautet das älteste Resultat dieser Art

$$(2.1) \quad \int_{T_0}^{T_0+T} \left| \sum_{n=1}^N a_n n^{-it} \right|^2 dt = \{T + O(N \log N)\} \cdot \sum_{n=1}^N |a_n|^2 ;$$

dabei sind T_0, T beliebige reelle und die Koeffizienten a_n beliebige komplexe Zahlen.

Im Zahlkörper K werden Polynome der Form

$$P(s) = \sum_{1 \leq N\alpha \leq N} c(\alpha) (N\alpha)^{-s}$$

betrachtet, wobei über alle ganzen Ideale α aus K mit $1 \leq N\alpha \leq N$ summiert wird. Die Koeffizienten $c(\alpha)$ sind beliebige komplexe Zahlen und $s = \sigma + it$ eine komplexe Variable.

Unter Benutzung des Satzes von Weber

$$\sum_{N\alpha \leq x} 1 = a_K x + O(x^{1-\frac{2}{n+1}}),$$

wobei a_K das Residuum der Dedekindschen Zetafunktion $\zeta_K(s)$ ist, und Abelscher partieller Summation ergibt sich unmittelbar die folgende Verallgemeinerung von (2.1) :

$$(2.2) \quad \int_{T_0}^{T_0+T} |P(it)|^2 dt = T \sum_{\substack{\alpha, \psi \\ 1 \leq N\alpha = N\psi \leq N}} c(\alpha) \overline{c(\psi)} +$$

$$+ O\left\{(N \log N + N^{2-\frac{2}{n+1}}) \sum_{1 \leq N\sigma \leq N} |c(\sigma)|^2\right\}.$$

Die 0-Konstante hängt nur vom Körper K ab.

Die Abschätzung (2.2) läßt sich jedoch verbessern, wenn man das nachstehende Lemma beachtet.

Lemma 2.1 : Es sei $D(k) = \sum_{\sigma/(k)} 1$, $k \in \mathbb{N}$.

Dann gilt für beliebiges $\varepsilon > 0$

$$(2.3) \quad D(k) \ll_{\varepsilon} k^{\varepsilon},$$

wobei die auftretende $\ll$ -Konstante vom Körper K und von ε abhängt.

Beweis: Es darf $\varepsilon < n$ angenommen werden, ferner $k > 1$.

Sei $(k) = \prod_{p/(k)} p^{\alpha_p}$ die kanonische Zerlegung.

Dann ist $D(k) = \sum_{\sigma/(k)} 1 = \prod_{p/(k)} (\alpha_p + 1)$.

Es gilt:

$$k^n = N(k) = \prod_{p/(k)} (N_p)^{\alpha_p}.$$

Wir bilden

$$\begin{aligned} D(k) k^{-\varepsilon} &= \prod_{p/(k)} (\alpha_p + 1) (k^n)^{-\frac{\varepsilon}{n}} \\ &= \prod_{p/(k)} (\alpha_p + 1) (N_p)^{-\frac{\alpha_p \varepsilon}{n}}. \end{aligned}$$

$$\text{Es folgt } D(k) k^{-\varepsilon} \leq \prod_{\substack{p/(k) \\ Np < 2^{\frac{n}{\varepsilon}}}} (\alpha_p + 1) (Np)^{-\frac{\alpha_p \cdot \varepsilon}{n}},$$

$$\text{denn für } Np \geq 2^{\frac{n}{\varepsilon}} \text{ ist } (Np)^{\frac{\alpha_p \cdot \varepsilon}{n}} \geq 2^{\alpha_p} = (1+1)^{\alpha_p} \geq 1 + \alpha_p.$$

Somit erhält man

$$\begin{aligned} D(k) k^{-\varepsilon} &\leq \prod_{\substack{p/(k) \\ Np < 2^{\frac{n}{\varepsilon}}}} (\alpha_p + 1) 2^{-\frac{\alpha_p \cdot \varepsilon}{n}} \\ &\leq \prod_{\substack{p/(k) \\ Np < 2^{\frac{n}{\varepsilon}}}} (\alpha_p + 1) e^{-\frac{\alpha_p \cdot \varepsilon}{n} \cdot \log 2} \end{aligned}$$

$$\leq \prod_{\substack{p/(k) \\ Np < 2^{\frac{n}{\varepsilon}}}} (\alpha_p + 1) \frac{n}{\alpha_p \cdot \varepsilon \log 2}$$

$$\leq \prod_{\substack{p/(k) \\ Np < 2^{\frac{n}{\varepsilon}}}} \frac{2n}{\varepsilon \log 2} \quad \text{wegen } \frac{\alpha_p + 1}{\alpha_p} \leq 2$$

$$\leq \prod_{\substack{p \\ Np < 2^{\frac{n}{\varepsilon}}}} \frac{2n}{\varepsilon \log 2} \quad \text{wegen } \frac{2n}{\varepsilon \log 2} > \frac{2}{\log 2} > 1$$

$$<<_{\varepsilon} 1.$$

Mit Lemma 2.1 ergibt sich

Satz 2.1 : Für beliebige reelle T_0, T und $\epsilon > 0$ gilt:

$$(2.4) \quad \int_{T_0}^{T_0+T} |P(it)|^2 dt = T \sum_{\substack{\alpha, \beta \\ 1 \leq N\alpha = N\beta \leq N}} c(\alpha) \overline{c(\beta)} + \\ + O_\epsilon(N^{1+\epsilon} \sum_{1 \leq N\alpha \leq N} |c(\alpha)|^2).$$

Die O-Konstante hängt vom Körper K und von ϵ ab.

Beweis : Zunächst gilt

$$|P(it)|^2 = \sum_{\substack{\alpha, \beta \\ 1 \leq N\alpha = N\beta \leq N}} c(\alpha) \overline{c(\beta)} + \sum_{\substack{\alpha, \beta \\ 1 \leq N\alpha \neq N\beta \leq N}} c(\alpha) \overline{c(\beta)} \left(\frac{N\beta}{N\alpha}\right)^{it}.$$

Daraus folgt durch Integration

$$(2.5) \quad \int_{T_0}^{T_0+T} |P(it)|^2 dt = T \cdot \sum_{1 \leq N\alpha = N\beta \leq N} c(\alpha) \overline{c(\beta)} + S,$$

wobei
$$S = \sum_{1 \leq N\alpha \neq N\beta \leq N} c(\alpha) \overline{c(\beta)} \int_{T_0}^{T_0+T} \left(\frac{N\beta}{N\alpha}\right)^{it} dt.$$

Wegen

$$\int_{T_0}^{T_0+T} \left(\frac{N\beta}{N\alpha}\right)^{it} dt = \int_{T_0}^{T_0+T} e^{it \log \frac{N\beta}{N\alpha}} dt = O\left(\frac{1}{|\log \frac{N\beta}{N\alpha}|}\right)$$

ergibt sich unmittelbar die folgende Abschätzung für S :

$$S \ll \sum_{\substack{\alpha, \beta \\ 1 \leq N\alpha \neq N\beta \leq N}} |c(\alpha) \overline{c(\beta)}| \frac{1}{|\log \frac{N\beta}{N\alpha}|}$$

$$<< \sum_{\substack{\alpha, \beta \\ 1 \leq N\alpha < N\beta \leq N}} |c(\alpha)| |c(\beta)| \frac{1}{\log \frac{N\beta}{N\alpha}}.$$

Für $1 \leq N\alpha < N\beta \leq N$ gilt nun

$$\log \frac{N\beta}{N\alpha} = \int_{N\alpha}^{N\beta} \frac{dt}{t} \geq \frac{N\beta - N\alpha}{N\beta} \geq \frac{N\beta - N\alpha}{N}.$$

Somit erhält man unter Benutzung von

$$|c(\alpha)| |c(\beta)| \leq \frac{1}{2} |c(\alpha)|^2 + \frac{1}{2} |c(\beta)|^2;$$

$$(2.6) \quad S << \sum_{\substack{\alpha, \beta \\ 1 \leq N\alpha < N\beta \leq N}} |c(\alpha)|^2 \frac{N}{N\beta - N\alpha} + \sum_{\substack{\alpha, \beta \\ 1 \leq N\alpha < N\beta \leq N}} |c(\beta)|^2 \frac{N}{N\beta - N\alpha}.$$

Die letzten beiden Summen bezeichne man mit S_1 bzw. S_2 .
Es soll zunächst S_1 untersucht werden.

$$S_1 = N \sum_{\substack{\alpha \\ 1 \leq N\alpha \leq N}} |c(\alpha)|^2 \cdot \sum_{\substack{\beta \\ N\alpha < N\beta \leq N}} \frac{1}{N\beta - N\alpha}.$$

Die zweite Summe läßt sich mit (2.3) wie folgt abschätzen:

$$\sum_{\substack{\beta \\ N\alpha < N\beta \leq N}} \frac{1}{N\beta - N\alpha} = \sum_{N\alpha < k \leq N} \frac{F(k)}{k - N\alpha}, \quad \text{wobei} \quad F(k) = \sum_{\substack{\beta \\ N\beta = k}} 1 \leq d(k)$$

$$\leq \sum_{1 \leq m \leq N - N\alpha} \frac{d(m + N\alpha)}{m}$$

$$<< \varepsilon \sum_{1 \leq m \leq N - N\alpha} \frac{(m + N\alpha)^{\frac{\varepsilon}{2}}}{m}$$

$$\ll_{\epsilon} (N\alpha)^{\frac{\epsilon}{2}} \sum_{1 \leq m \leq N-N\alpha} \frac{1}{1 - \frac{\epsilon}{2m}} \\ \ll_{\epsilon} (N\alpha)^{\frac{\epsilon}{2}} (N-N\alpha)^{\frac{\epsilon}{2}} \ll_{\epsilon} N^{\epsilon}.$$

Es folgt also

$$(2.7) \quad S_1 \ll_{\epsilon} N^{1+\epsilon} \sum_{1 \leq N\alpha \leq N} |c(\alpha)|^2.$$

Analog ergibt sich für die zweite Summe S_2 :

$$(2.8) \quad S_2 \ll_{\epsilon} N^{1+\epsilon} \sum_{1 \leq N\beta \leq N} |c(\beta)|^2.$$

Insgesamt erhält man schließlich mit (2.5), (2.6), (2.7) und (2.8) die Behauptung.

Man kann das Integral in Satz 2.1 durch eine endliche Summe ersetzen. Dieses Resultat, das im rationalen Fall von Davenport stammt [s.11], überträgt sich unmittelbar auf Zahlkörper. Man benötigt eine Ungleichung, die von Gallagher bewiesen wurde.

Lemma 2.2 (Gallagher) : Es seien T_0 und $T \geq \delta > 0$ reelle

Zahlen. Die komplexwertige Funktion $f(t)$ sei im Intervall $[T_0, T_0 + T]$ stetig und stetig differenzierbar auf $(T_0, T_0 + T)$.

Ferner sei M eine endliche Menge von reellen Zahlen aus dem Intervall $[T_0 + \frac{\delta}{2}, T_0 + T - \frac{\delta}{2}]$ mit der Eigenschaft

$$|t - t'| \geq \delta \quad \text{für verschiedene } t, t' \in M.$$

Dann gilt:

$$(2.9) \quad \sum_{t \in M} |f(t)|^2 \leq \delta^{-1} \int_{T_0}^{T_0+T} |f(t)|^2 dt + \left(\int_{T_0}^{T_0+T} |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{T_0}^{T_0+T} |f'(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Beweis : [s.13, Lemma 1.4] .

Satz 2.2 : Es seien $T_0, T \geq \delta > 0$ und $\varepsilon > 0$ reelle Zahlen.

Ferner sei

$$T_0 + \frac{\delta}{2} \leq t_1 < t_2 < \dots < t_R \leq T_0 + T - \frac{\delta}{2}$$

eine Zerlegung des Intervalls $[T_0 + \frac{\delta}{2}, T_0 + T - \frac{\delta}{2}]$ mit

$$t_{l+1} - t_l \geq \delta \quad \text{für } l=1, \dots, R-1.$$

Dann gilt :

$$\sum_{l=1}^R |P(it_l)|^2 \leq (\delta^{-1} + \log N) \left\{ T \cdot \sum_{\substack{\alpha, \beta \\ 1 \leq N\alpha = N\beta \leq N}} c(\alpha) \overline{c(\beta)} + \right. \\ \left. + O_{\varepsilon} \left(N^{1+\varepsilon} \sum_{1 \leq N\alpha \leq N} |c(\alpha)|^2 \right) \right\}.$$

Die 0-Konstante hängt vom Körper K und von ε ab.

Beweis : Man setze in Lemma 2.2

$$f(t) = P(it) = \sum_{1 \leq Na \leq N} c(a) (Na)^{-it} ;$$

dann folgt aus (2.9):

$$\sum_{l=1}^R |P(it_l)|^2 \leq \delta^{-1} \int_{T_0}^{T_0+T} |P(it)|^2 dt + \left(\int_{T_0}^{T_0+T} |P(it)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{T_0}^{T_0+T} |P'(it)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Die letzten Integrale lassen sich nach Satz 2.1 wie folgt abschätzen:

$$\int_{T_0}^{T_0+T} |P(it)|^2 dt = T \sum_{\substack{a, b \\ 1 \leq Na = Nb \leq N}} c(a) \overline{c(b)} + O_{\epsilon}(N^{1+\epsilon} \sum_{1 \leq Na \leq N} |c(a)|^2),$$

$$\int_{T_0}^{T_0+T} |P'(it)|^2 dt = \int_{T_0}^{T_0+T} \left| \sum_{1 \leq Na \leq N} c(a) \log Na (Na)^{-it} \right|^2 dt$$

$$= T \cdot \sum_{\substack{a, b \\ 1 \leq Na = Nb \leq N}} c(a) \overline{c(b)} (\log Na)^2 + O_{\epsilon}(N^{1+\epsilon} \cdot \sum_{1 \leq Na \leq N} |c(a) \log Na|^2).$$

Insgesamt ergibt sich somit:

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^R |P(it_l)|^2 &\leq \delta^{-1} \{ T \cdot \sum_{1 \leq Na = Nb \leq N} c(a) \overline{c(b)} + O_{\epsilon}(N^{1+\epsilon} \cdot \sum_{1 \leq Na \leq N} |c(a)|^2) \} \\ &\quad + \{ T \cdot \sum_{\substack{a, b \\ 1 \leq Na = Nb \leq N}} c(a) \overline{c(b)} (\log Na)^2 + O_{\epsilon}(N^{1+\epsilon} \sum_{1 \leq Na \leq N} |c(a)|^2 \cdot (\log Na)^2) \}^{\frac{1}{2}} . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \cdot \left\{ T \cdot \sum_{\substack{\alpha, b \\ 1 \leq N\alpha = Nb \leq N}} c(\alpha) \overline{c(b)} + O_{\epsilon}(N^{1+\epsilon} \cdot \sum_{1 \leq N\alpha \leq N} |c(\alpha)|^2)^{\frac{1}{2}} \right. \\
 & \leq \delta^{-1} \cdot \left\{ T \cdot \sum_{\substack{\alpha, b \\ 1 \leq N\alpha = Nb \leq N}} c(\alpha) \overline{c(b)} + O_{\epsilon}(N^{1+\epsilon} \cdot \sum_{1 \leq N\alpha \leq N} |c(\alpha)|^2) \right\} \\
 & + \log N \cdot \left\{ T \cdot \sum_{\substack{\alpha, b \\ 1 \leq N\alpha = Nb \leq N}} c(\alpha) \overline{c(b)} + O_{\epsilon}(N^{1+\epsilon} \cdot \sum_{1 \leq N\alpha \leq N} |c(\alpha)|^2) \right\} \\
 & = (\delta^{-1} + \log N) \cdot \left\{ T \cdot \sum_{\substack{\alpha, b \\ 1 \leq N\alpha = Nb \leq N}} c(\alpha) \overline{c(b)} + \right. \\
 & \quad \left. + O_{\epsilon}(N^{1+\epsilon} \cdot \sum_{1 \leq N\alpha \leq N} |c(\alpha)|^2) \right\}.
 \end{aligned}$$

3. Die eingangs behandelte Problemstellung wird jetzt wie folgt verallgemeinert.

Es sei G die engere Idealklassengruppe modulo $\mathfrak{q}$ der Ordnung $h(\mathfrak{q})$ und χ einer der $h(\mathfrak{q})$ Charaktere der abelschen Gruppe G .

Man betrachtet Polynome

$$P(s, \chi) = \sum_{1 \leq N\alpha \leq N} c(\alpha) \chi(\alpha) (N\alpha)^{-s},$$

wobei die Koeffizienten $c(\alpha)$ wieder beliebige komplexe Zahlen sind, und $s = \sigma + it$ eine komplexe Variable ist.

Es sollen Ausdrücke der Form

$$(3.1) \quad \sum_{N\mathfrak{q} \leq Q} \sum_{\chi \bmod \mathfrak{q}}^* \sum_{l=1}^R |P(s_{\chi, l}, \chi)|^2$$

abgeschätzt werden. Dabei wird über alle ganzen Ideale $\mathfrak{q}$ aus K mit $N\mathfrak{q} \leq Q$ und alle primitiven Charaktere χ der engeren Idealklassengruppe modulo $\mathfrak{q}$ summiert. Die innere Summation entspricht der in Satz 2.2.

Ein wichtiges Hilfsmittel ist das folgende Lemma von Bombieri, welches die Beweismethode von Halász ersetzt.

In diesem und den folgenden Paragraphen hängen alle auftretenden $\ll$ -Konstanten nur vom Körper K ab.

Lemma 3.1 (Bombieri) : Es sei V ein Vektorraum über dem

Körper der komplexen Zahlen, in dem ein Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)$ erklärt ist.

Ferner seien $x, y_1, \dots, y_R$ Elemente aus V .

Dann gilt:

$$\sum_{r=1}^R |(x, y_r)|^2 \leq (x, x) \cdot \max_{1 \leq r \leq R} \sum_{s=1}^R |(y_r, y_s)|.$$

Beweis: [13; Lemma 1.5] .

Das nachstehende Lemma ist eine unmittelbare Anwendung von Lemma 3.1 .

Lemma 3.2 : Es sei

$$P(s, \chi) = \sum_{1 \leq Na \leq N} c(a) \chi(a) (Na)^{-s},$$

wobei χ ein beliebiger Charakter modulo q ist.

$\mathcal{M}$ sei eine endliche Menge von Tripeln $(q, \chi, s) = (q, \chi \bmod q, s)$ und α eine beliebige reelle Zahl.

Dann gilt:

$$(3.2) \quad \sum_{(q, \chi, s) \in \mathcal{M}} |P(s, \chi)|^2 \leq \left\{ \sum_{1 \leq Na \leq N} |c(a)|^2 (1(a))^{-1} (Na)^{-2\alpha} \right\} \cdot$$

$$\max_{(q, \chi, s) \in \mathcal{M}} \sum_{(q', \chi', s') \in \mathcal{M}} |K(\bar{s} + s' - 2\alpha, \bar{\chi} \chi')|,$$

wobei
$$K(s, \chi) = \sum_a 1(a) \chi(a) (Na)^{-s}.$$

Dabei sind die reellen Zahlen $l(\alpha) \geq 0$ so zu wählen, daß

$$\sum_{\alpha} l(\alpha) (N\alpha)^{2\alpha-2\sigma}$$

für alle $(q, \chi, \sigma + it) \in \mathcal{M}$ konvergiert und $l(\alpha) > 0$ für $c(\alpha) \neq 0$ ist.

$\bar{\chi}\chi'$ ist ein Charakter modulo $[q, q'] = \frac{q \cdot q'}{(q, q')}$.

Beweis: Die komplexen Zahlenfolgen $\{\xi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ mit

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2 < \infty$$

bilden einen Hilbertraum, wenn man das Skalarprodukt für

$x = \{\xi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, $y = \{\eta_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ durch

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \bar{\eta}_i$$

definiert.

Man setze in Lemma 3.1:

$$x = \{(N\alpha)^{-\alpha} c(\alpha) (l(\alpha))^{-\frac{1}{2}}\}, \text{ wobei } c(\alpha) = 0 \text{ für } N\alpha > N$$

$$y = \{(l(\alpha))^{\frac{1}{2}} \bar{\chi}(\alpha) (N\alpha)^{\alpha-\bar{s}}\}.$$

Dann folgt:

$$\sum_{(q, \chi, s) \in \mathcal{M}} \left| \sum_{1 \leq N\alpha \leq N} c(\alpha) \chi(\alpha) (N\alpha)^{-s} \right|^2 \leq \left\{ \sum_{1 \leq N\alpha \leq N} |c(\alpha)|^2 (l(\alpha))^{-1} (N\alpha)^{-2s} \right\}$$

$$\max_{(q, \chi, s) \in \mathcal{M}} \sum_{(q', \chi', s') \in \mathcal{M}} \left| \sum_{\alpha} l(\alpha) \bar{\chi}(\alpha) \chi'(\alpha) (N\alpha)^{2\alpha-\bar{s}-s'} \right|.$$

Mit Hilfe von Lemma 3.2 lassen sich nun Abschätzungen für den Ausdruck (3.1) beweisen.

Durch entsprechende Wahl der reellen Zahlen $l(\alpha)$ in (3.2) ergeben sich verschiedene Resultate.

Zunächst wird eine gute Abschätzung für $K(s, \chi)$ benötigt. Dazu wählt man

$$l(\alpha) = e^{-\left(\frac{N\alpha}{2N}\right)^r} - e^{-\left(\frac{N\alpha}{N}\right)^r} \quad \text{mit } r = \log N.$$

Lemma 3.3 : Es sei $r \geq 1$ eine reelle Zahl und

$$l(\alpha) = e^{-\left(\frac{N\alpha}{2N}\right)^r} - e^{-\left(\frac{N\alpha}{N}\right)^r}.$$

Dann gilt:

$$i) \quad l(\alpha) \gg 1 \quad \text{für } N \leq N\alpha \leq 2N$$

$$ii) \quad \sum_{\alpha} l(\alpha) \ll N$$

$$iii) \quad l(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} (N\alpha)^{-w} \Gamma\left(\frac{w}{r}+1\right) \frac{(2N)^w - N^w}{w} dw,$$

wo $\Gamma(u)$ die Gammafunktion bedeutet.

Beweis: Es gilt für $N \leq N\alpha \leq 2N$:

$$e^{-\left(\frac{N\alpha}{2N}\right)^r} - e^{-\left(\frac{N\alpha}{N}\right)^r} = \int_{\left(\frac{N\alpha}{2N}\right)^r}^{\left(\frac{N\alpha}{N}\right)^r} e^{-t} dt \geq \int_{\frac{N\alpha}{2N}}^{\frac{N\alpha}{N}} e^{-t} dt$$

$$\geq \left(\frac{N\alpha}{N} - \frac{N\alpha}{2N} \right) e^{-\frac{N\alpha}{N}} \geq \frac{1}{2} \frac{N\alpha}{N} e^{-2} \gg 1.$$

Zu ii): Zunächst folgt:

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} 1(\alpha) &= \sum_{\alpha} \left\{ e^{-\left(\frac{N\alpha}{2N}\right)^r} - e^{-\left(\frac{N\alpha}{N}\right)^r} \right\} \\ &\leq \sum_{\alpha} e^{-\left(\frac{N\alpha}{2N}\right)^r} \\ &= \sum_{N\alpha \leq 2N} e^{-\left(\frac{N\alpha}{2N}\right)^r} + \sum_{N\alpha > 2N} e^{-\left(\frac{N\alpha}{2N}\right)^r} \\ &<< N + \sum_{k=2N+1}^{\infty} \{H(k) - H(k-1)\} e^{-\frac{k}{2N}}, \end{aligned}$$

$$\text{wobei } H(k) = \sum_{\substack{\alpha \\ N\alpha \leq k}} 1 \ll k.$$

Die letzte Summe läßt sich wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned} \sum_{k=2N+1}^{\infty} \{H(k) - H(k-1)\} e^{-\frac{k}{2N}} &\leq \sum_{k=2N+1}^{\infty} H(k) \left\{ e^{-\frac{k}{2N}} - e^{-\frac{k+1}{2N}} \right\} \\ &<< \sum_{k=2N+1}^{\infty} k \cdot \int_{-\frac{k+1}{2N}}^{-\frac{k}{2N}} e^t dt \\ &\leq \sum_{k=2N+1}^{\infty} k \cdot \left\{ \frac{k+1}{2N} - \frac{k}{2N} \right\} e^{-\frac{k}{2N}} \\ &<< N^{-1} \sum_{k=2N+1}^{\infty} k e^{-\frac{k}{2N}} \end{aligned}$$

$$\leq N^{-1} \cdot \sum_{k=2N+1}^{\infty} \int_{k-1}^k (t+1) e^{-\frac{t}{2N}} dt$$

$$<< N^{-1} \cdot \int_0^{\infty} (t+1) e^{-\frac{t}{2N}} dt << N.$$

Zu iii): Für $y > 0$ gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \Gamma(w) y^{-w} dw = e^{-y},$$

wenn $b > 0$ ist und $\Gamma(w)$ die Gammafunktion bedeutet.

(siehe [14, Anhang, Lemma 3.2]).

Somit folgt

$$l(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{2}{r}-i\infty}^{\frac{2}{r}+i\infty} \Gamma(w) \left\{ \left(\frac{N\alpha}{2N} \right)^{-rw} - \left(\frac{N\alpha}{N} \right)^{-rw} \right\} dw$$

$$= \frac{1}{2\pi i r} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \Gamma\left(\frac{w}{r}\right) (N\alpha)^{-w} \{ (2N)^w - N^w \} dw$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \Gamma\left(\frac{w}{r}+1\right) (N\alpha)^{-w} \frac{(2N)^w - N^w}{w} dw$$

wegen $\Gamma(w+1) = w\Gamma(w)$.

Es soll jetzt eine erste wichtige Abschätzung für

$$K(s, \chi) = \sum_{\alpha} l(\alpha) \chi(\alpha) (N\alpha)^{-s}$$

angegeben werden, die beim Beweis des späteren Hauptsatzes 3.1 wesentlich benutzt wird.

Lemma 3.4 : Es sei χ ein Charakter der engeren Idealklassengruppe modulo $\mathfrak{q}$.

Ferner sei $s = \sigma + it$, $\sigma \geq 0$,

$$l(\alpha) = e^{-\left(\frac{N\alpha}{2N}\right)^r} - e^{-\left(\frac{N\alpha}{N}\right)^r} \quad \text{mit } r = \log N$$

$$\text{und } N\mathfrak{q} \cdot (|t|+1)^n \leq \frac{(2\pi)^n}{d} \cdot (6n)^{-n} \cdot N \cdot (\log N)^{-3n}.$$

Dann gilt:

$$\left| \sum_{\alpha} l(\alpha) \chi(\alpha) (N\alpha)^{-s} \right| \ll 1 + \varepsilon(\chi) \cdot N \cdot e^{-|t|} (\log N)^{-1},$$

$$\text{wobei } \varepsilon(\chi) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \chi \text{ Hauptcharakter mod } \mathfrak{q} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Beweis: 1) Für $r = \log N \ll 1$ folgt die Behauptung wegen

$$\left| \sum_{\alpha} l(\alpha) \chi(\alpha) (N\alpha)^{-s} \right| \leq \sum_{\alpha} l(\alpha) \ll N \ll 1.$$

2) Sei $\sigma \geq 2$; dann erhält man

$$\left| \sum_{\alpha} l(\alpha) \chi(\alpha) (N\alpha)^{-s} \right| \leq \sum_{\alpha} (N\alpha)^{-2} \ll 1.$$

3) Es sei nun $0 \leq \sigma \leq 2$, $r \geq 6$; dann gilt nach Lemma 3.3:

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} l(\alpha) \chi(\alpha) (N\alpha)^{-s} &= \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \sum_{\alpha} \chi(\alpha) (N\alpha)^{-(s+w)} \Gamma\left(\frac{w}{r}+1\right) \cdot \\ &\quad \cdot \frac{(2N)^w - N^w}{w} dw. \end{aligned}$$

$$(3.3) \quad = \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \zeta_K(s+w, \chi) \Gamma\left(\frac{w}{r}+1\right) \frac{(2N)^w - N^w}{w} dw.$$

Die Vertauschung von Summation und Integration ist erlaubt wegen

$$\sum_n \chi(n) (Nn)^{-(s+w)} \ll \sum_n (Nn)^{-2} \ll 1.$$

Für $-1 \leq \sigma \leq 2$, $|t| \geq 1$ gilt nach [5; Satz 229] :

$$(3.4) \quad |\Gamma(s)| \ll e^{-\frac{\pi}{2}|t|} |t|^{\sigma-\frac{1}{2}}, \quad s = \sigma + it.$$

Es wird jetzt der Residuensatz auf das Integral (3.3) und das Rechteck R mit den Ecken $2 \pm iT$, $-\frac{r}{2} \pm iT$ angewendet.

Die Integrale über die Horizontalstücke streben für $T \rightarrow \infty$ gegen 0, denn es gilt für $-\frac{r}{2} \leq \text{Re } w \leq 2$:

$$\zeta_K(s+w, \chi) \ll (Nq)^2 T^{n(\frac{1}{2} + \frac{r}{2})} \quad \text{nach [10; Lemma 1]}$$

$$\Gamma\left(\frac{w}{r}+1\right) \ll e^{-\frac{\pi T}{2r}} \left(\frac{T}{r}\right) \quad \text{wegen (3.4)}$$

$$\frac{(2N)^w - N^w}{w} \ll \int_N^{2N} t \, dt \ll N^2.$$

Somit folgt:

$$|\zeta_K(s+w, \chi) \Gamma\left(\frac{w}{r}+1\right) \frac{(2N)^w - N^w}{w}| \ll (Nq)^2 \cdot N^2 \cdot e^{-\frac{\pi T}{2r}} T^{n(\frac{1}{2} + \frac{r}{2})+1}.$$

Der Integrand

$$\zeta_K(s+w, \chi) \Gamma\left(\frac{w}{r}+1\right) \frac{(2N)^w - N^w}{w}$$

ist im Rechteck R regulär bis auf einen Pol erster Ordnung bei $w=1-s$ mit dem Residuum

$$\ll \prod_{p \mid q} (1 - (Np)^{-1}) \left| \Gamma\left(\frac{1-s}{r} + 1\right) \right| \left| \frac{(2N)^{1-s} - N^{1-s}}{1-s} \right| \\ = \frac{\phi(q)}{N(q)} \left| \Gamma\left(\frac{1-s}{r} + 1\right) \right| \left| \frac{(2N)^{1-s} - N^{1-s}}{1-s} \right| ,$$

falls χ Hauptcharakter modulo q ist.

Somit ergibt sich

$$(3.5) \quad \left| \sum_{\alpha} l(\alpha) \chi(\alpha) (N\alpha)^{-s} \right| \ll \varepsilon(\chi) \left| \Gamma\left(\frac{1-s}{r} + 1\right) \right| \left| \frac{(2N)^{1-s} - N^{1-s}}{1-s} \right| \\ + \left| \int_{-\frac{r}{2}-i\infty}^{-\frac{r}{2}+i\infty} \zeta_K(s+w, \chi) \Gamma\left(\frac{w}{r} + 1\right) \frac{(2N)^w - N^w}{w} dw \right| .$$

Es soll zunächst der erste Summand auf der rechten Seite abgeschätzt werden.

Es gilt:

$$\frac{(2N)^{1-s} - N^{1-s}}{1-s} \ll \int_N^{2N} x^{-\sigma} dx \ll N .$$

Für $|t| < 1$, $0 \leq \sigma \leq 2$ folgt wegen $r \geq 2$:

$$\left| \Gamma\left(\frac{1-s}{r} + 1\right) \right| \leq \Gamma\left(\frac{1-\sigma}{r} + 1\right) \ll 1 \ll e^{-|t|(\log N)^{-1}} .$$

Für $|t| \geq 1$, $0 \leq \sigma \leq 2$ ergibt sich aus (3.4):

$$\left| \Gamma\left(\frac{1-s}{r} + 1\right) \right| \ll e^{-\frac{\pi}{2} \frac{|t|}{r}} \left(\frac{|t|}{r}\right)^{\frac{1}{2} + \frac{1-\sigma}{r}} \ll e^{-|t|(\log N)^{-1}} .$$

Man erhält also

$$(3.6) \quad \left| \sum_{\alpha} l(\alpha) \chi(\alpha) (N\alpha)^{-s} \right| \ll \varepsilon(\chi) N e^{-|t|(\log N)^{-1}} \\ + \left| \int_{-\frac{r}{2}-i\infty}^{-\frac{r}{2}+i\infty} \zeta_K(s+w, \chi) \Gamma\left(\frac{w}{r} + 1\right) \frac{(2N)^w - N^w}{w} dw \right| .$$

Es bleibt noch das letzte Integral abzuschätzen.

Mit (3.4) folgt zunächst für $|u| \geq 1$:

$$|\Gamma(\frac{1}{2}+iu)| \ll e^{-\frac{\pi}{2}|u|}.$$

Offensichtlich erhält man für $|u| < 1$ ebenfalls

$$|\Gamma(\frac{1}{2}+iu)| \ll 1 \ll e^{-\frac{\pi}{2}|u|}.$$

Für jeden primitiven Charakter χ der engeren Idealklassengruppe modulo $\mathfrak{q}$ und für $\sigma \leq -1$ gilt [s. Anhang] :

$$(3.7) \quad \zeta_K(\sigma+it, \chi) \ll \left\{ \frac{d}{(2\pi)^n} \cdot N\mathfrak{q} \cdot (3(1-\sigma)(|t|+1))^n \right\}^{\frac{1}{2}-\sigma};$$

dabei ist d die Diskriminante des Körpers K .

Es sei jetzt χ ein beliebiger Charakter mod $\mathfrak{q}$. $\mathfrak{q}_1$ sei der Führer von χ und χ_1 der zugehörige primitive Charakter mod $\mathfrak{q}_1$.

Sei $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_1 \cdot \mathfrak{q}_2$; dann folgt für $\sigma = \operatorname{Re} s \leq -1$:

$$\begin{aligned} \zeta_K(s, \chi) &= \prod_{\mathfrak{p}/\mathfrak{q}} (1 - \chi_1(\mathfrak{p})(N\mathfrak{p})^{-s}) \zeta_K(s, \chi_1) \\ &\ll \left| \prod_{\mathfrak{p}/\mathfrak{q}} (1 - \chi_1(\mathfrak{p})(N\mathfrak{p})^{-s}) \right| \left\{ \frac{d}{(2\pi)^n} N\mathfrak{q}_1 (3(1-\sigma)(|t|+1))^n \right\}^{\frac{1}{2}-\sigma} \\ &= \left| \prod_{\mathfrak{p}/\mathfrak{q}_2} (1 - \chi_1(\mathfrak{p})(N\mathfrak{p})^{-s}) \right| \left\{ \frac{d}{(2\pi)^n} N\mathfrak{q}_1 (3(1-\sigma)(|t|+1))^n \right\}^{\frac{1}{2}-\sigma} \end{aligned}$$

wegen $\chi_1(\mathfrak{p}) = 0$ für $\mathfrak{p}/\mathfrak{q}_1$

$$\leq \sum_{\mathfrak{a}/\mathfrak{q}_2} |\mu(\mathfrak{a}) \chi_1(\mathfrak{a})(N\mathfrak{a})^{-s}| \left\{ \frac{d}{(2\pi)^n} N\mathfrak{q}_1 (3(1-\sigma)(|t|+1))^n \right\}^{\frac{1}{2}-\sigma}$$

$$\leq (Nq_2)^{-\sigma} \cdot (Nq_1)^{\frac{1}{2}-\sigma} \cdot \sum_{\substack{m/q_2}} 1 \cdot \left\{ \frac{d}{(2\pi)^n} (3(1-\sigma)(|t|+1))^n \right\}^{\frac{1}{2}-\sigma}$$

$$<< \left\{ \frac{d}{(2\pi)^n} Nq \cdot (3(1-\sigma)(|t|+1))^n \right\}^{\frac{1}{2}-\sigma}.$$

Nach diesen Vorbereitungen läßt sich das Integral in (3.6) * folgendermaßen abschätzen:

$$(3.8) \quad \left| \int_{-\frac{r}{2}-i\infty}^{-\frac{r}{2}+i\infty} \zeta_K(s+w, \chi) \Gamma\left(\frac{w}{r}+1\right) \frac{(2N)^w - N^w}{w} dw \right|$$

$$<< \left\{ \frac{d}{(2\pi)^n} Nq \cdot (3(1-\sigma+\frac{r}{2}))^n \right\}^{\frac{1}{2}-\sigma+\frac{r}{2}} \cdot N^{-\frac{r}{2}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (|t+u|+1)^{n(\frac{1}{2}-\sigma+\frac{r}{2})} e^{-\frac{|u|}{r}} \cdot | \frac{r}{2} + iu |^{-1} du$$

$$<< \left\{ \frac{d}{(2\pi)^n} Nq \cdot (3(1-\sigma+\frac{r}{2}))^n \right\}^{\frac{1}{2}-\sigma+\frac{r}{2}} \cdot N^{-\frac{r}{2}} \cdot \left\{ \int_{-\infty}^{-1} (|t+u|+1)^{n(\frac{1}{2}-\sigma+\frac{r}{2})} e^{-\frac{|u|}{r}} du \right.$$

$$\left. + \int_{-1}^1 (|t+u|+1)^{n(\frac{1}{2}-\sigma+\frac{r}{2})} e^{-\frac{|u|}{r}} du + \int_1^{\infty} (|t+u|+1)^{n(\frac{1}{2}-\sigma+\frac{r}{2})} \frac{e^{-\frac{|u|}{r}}}{|u|} du \right\}$$

$$<< \left\{ \frac{d}{(2\pi)^n} Nq \cdot (3(1-\sigma+\frac{r}{2}))^n \right\}^{\frac{1}{2}-\sigma+\frac{r}{2}} \cdot N^{-\frac{r}{2}} \cdot \{ 2(|t|+1) \}^{n(\frac{1}{2}-\sigma+\frac{r}{2})} \cdot$$

$$\cdot \int_0^{\infty} u^{n(\frac{1}{2}-\sigma+\frac{r}{2})-1} e^{-\frac{u}{r}} du$$

$$\ll \left\{ \frac{d}{(2\pi)^n} \text{Ng}(6r)^n (|t|+1)^n \right\}^{\frac{1}{2}-\sigma+\frac{r}{2}} N^{-\frac{r}{2}} r^{n(\frac{1}{2}-\sigma+\frac{r}{2})} \Gamma(n(\frac{1}{2}-\sigma+\frac{r}{2}))$$

$$\ll \left\{ \frac{d}{(2\pi)^n} \text{Ng}(6r^2)^n (|t|+1)^n \right\}^{\frac{1}{2}-\sigma+\frac{r}{2}} N^{-\frac{r}{2}} e^{-n(\frac{1}{2}-\sigma+\frac{r}{2})} (nr)^{n(\frac{1}{2}-\sigma+\frac{r}{2})-\frac{1}{2}}$$

wegen $\Gamma(x) < e^{\frac{1}{12x}} \sqrt{2\pi} x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$

$$\ll \left\{ \frac{d}{(2\pi)^n} \text{Ng}(6n)^n \cdot r^{3n} \cdot (|t|+1)^n \right\}^{\frac{1}{2}-\sigma+\frac{r}{2}} N^{-\frac{r}{2}} e^{-\frac{n}{2} \log N}$$

$$\ll N^{\frac{1}{2}-\sigma+\frac{r}{2}} N^{-\frac{r}{2}} N^{-\frac{n}{2}} \ll 1.$$

Schließlich folgt aus (3.6) und (3.8) die Behauptung.

Das nachstehende Lemma wird im Beweis des Satzes 3.1 benötigt und aus Gründen einer übersichtlicheren Beweisführung vorangestellt.

Lemma 3.5 : Es seien a und b beliebige reelle Zahlen. $\mathcal{M}$ bezeichne eine endliche Menge von Tripeln (η, χ, s_χ) , $s_\chi = \sigma_\chi + it_\chi$, wobei χ primitive Charaktere der engeren Idealklassengruppen modulo η , $\text{Ng} \leq Q$, sind. Ferner sei

$$\sigma_\chi \geq a, \quad b \leq t_\chi \leq b+1$$

für alle $(\eta, \chi, s_\chi) \in \mathcal{M}$.

Dann gilt:

$$\sum_{\eta, \chi} \left| \sum_{N \leq N\alpha \leq 2N} c(\alpha) \chi(\alpha) (N\alpha)^{-s_\chi} \right|^2 \ll (Q^2 + N) \cdot \sum_{N \leq N\alpha \leq 2N} |c(\alpha)|^2 (N\alpha)^{-2a}.$$

Die Koeffizienten $c(\alpha)$ sind beliebige komplexe Zahlen, und die auftretende $\ll$ -Konstante hängt nur vom Körper K ab.

Beweis: Zunächst gilt nach [3; Theorem 1] :

$$(3.9) \quad \sum_{Nq \leq Q} \sum_{\chi \bmod q}^* \left| \sum_{N \leq N\alpha \leq 2N} u(\alpha) \chi(\alpha) \right|^2 \ll (Q^2 + N) \cdot \sum_{N \leq N\alpha \leq 2N} |u(\alpha)|^2,$$

wobei die Koeffizienten $u(\alpha)$ beliebige komplexe Zahlen sind.

Die Behauptung von Lemma 3.5 ergibt sich hieraus durch partielle Summation.

Man kann o.B.d.A. $0 \leq t_\chi \leq 1$ annehmen. Andernfalls ersetze man die Koeffizienten $c(\alpha)$ durch $c(\alpha)(N\alpha)^{-it}$.

Man setze

$$S(\chi, m) = \sum_{N \leq N\alpha \leq m} c(\alpha) \chi(\alpha) (N\alpha)^{-a} ;$$

dann gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{N \leq N\alpha \leq 2N} c(\alpha) \chi(\alpha) (N\alpha)^{-s} X &= \sum_{N \leq N\alpha \leq 2N} \{ c(\alpha) \chi(\alpha) (N\alpha)^{-a} \} (N\alpha)^{a-s} X \\ &= \sum_{k=N}^{2N} \left(\sum_{N\alpha=k} c(\alpha) \chi(\alpha) (N\alpha)^{-a} \right) k^{a-s} X \\ &= \sum_{k=N}^{2N} \left(\sum_{N\alpha=k} c(\alpha) \chi(\alpha) (N\alpha)^{-a} \right) (2N)^{a-s} X + (s_\chi - a) \cdot \\ &\quad \int_N^{2N} \sum_{k=N}^{\xi} \left(\sum_{N\alpha=k} c(\alpha) \chi(\alpha) (N\alpha)^{-a} \right) \xi^{a-s} X^{-1} d\xi \\ &= S(\chi, 2N) (2N)^{a-s} X + (s_\chi - a) \cdot \int_N^{2N} S(\chi, \xi) \xi^{a-s} X^{-1} d\xi . \end{aligned}$$

Mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgt hieraus:

$$\left| \sum_{N \leq N\alpha \leq 2N} c(\alpha) \chi(\alpha) (N\alpha)^{-s} X \right|^2 \ll |S(\chi, 2N)|^2 \cdot N^{2a-2\sigma} X +$$

$$\begin{aligned}
 & + |s_X - a|^2 \cdot \left| \int_N^{2N} S(X, \xi) \xi^{a-s_X-1} d\xi \right|^2 \\
 & \ll |S(X, 2N)|^2 + |s_X - a|^2 \cdot \int_N^{2N} \xi^{2a-2\sigma_X-2} d\xi \cdot \int_N^{2N} |S(X, \xi)|^2 d\xi \\
 & \ll |S(X, 2N)|^2 + ((\sigma_X - a)^2 + 1) N^{2(a-\sigma_X)-1} \int_N^{2N} |S(X, \xi)|^2 d\xi
 \end{aligned}$$

wegen $\sigma_X \geq a$ und $0 \leq t_X \leq 1$

$$\ll |S(X, 2N)|^2 + N^{-1} \cdot \int_N^{2N} |S(X, \xi)|^2 d\xi$$

wegen $(\sigma_X - a) N^{-(\sigma_X - a)} \ll 1$ für $\sigma_X \geq a$.

Schließlich ergibt sich mit (3.9):

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\substack{q, X \\ (q, X, s_X) \in \mathcal{M}}} \left| \sum_{N \leq N\alpha \leq 2N} c(\alpha) \chi(\alpha) (N\alpha)^{-s_X} \right|^2 \\
 & \ll \sum_{Nq \leq Q} \sum_{\chi \bmod q}^* |S(X, 2N)|^2 + N^{-1} \cdot \int_N^{2N} \sum_{Nq \leq Q} \sum_{\chi \bmod q}^* |S(X, \xi)|^2 d\xi \\
 & \ll (Q^2 + N) \cdot \sum_{N \leq N\alpha \leq 2N} |c(\alpha)|^2 (N\alpha)^{-2a} + \\
 & \quad + N^{-1} \cdot \int_N^{2N} \sum_{Nq \leq Q} \sum_{\chi \bmod q}^* \left| \sum_{\substack{\xi \\ \frac{\xi}{2} \leq N\alpha \leq \xi}} c(\alpha) \chi(\alpha) (N\alpha)^{-a} \right|^2 d\xi,
 \end{aligned}$$

wobei $c(\alpha) = 0$ für $\frac{\xi}{2} \leq N\alpha < N$

$$\ll (Q^2 + N) \sum_{N \leq N\alpha \leq 2N} |c(\alpha)|^2 (N\alpha)^{-2a}.$$

Nach diesen Vorbereitungen kann jetzt einer der Hauptsätze dieses Kapitels formuliert und bewiesen werden.

Für den Körper der rationalen Zahlen wurde der entsprechende Satz von Montgomery in [11] hergeleitet.

Satz 3.1 : Für jeden primitiven Charakter χ der engen Idealklassengruppen modulo q , $Nq \leq Q$, sei R_χ eine natürliche Zahl.

Ferner seien

$$s_{\chi,1} = \sigma_{\chi,1} + it_{\chi,1}$$

für $1 \leq l \leq R_\chi$ komplexe Zahlen mit

$$\delta := \min_{q, \chi, j \neq k} |t_{\chi,j} - t_{\chi,k}| > 0.$$

Man setze

$$T := 1 + \max_{q, \chi, l} t_{\chi,1} - \min_{q, \chi, l} t_{\chi,1}$$

$$\sigma_0 := \min_{q, \chi, l} \sigma_{\chi,1}.$$

Dann gilt:

$$\sum_{Nq \leq Q} \sum_{\chi \bmod q}^* \sum_{l=1}^{R_\chi} \left| \sum_{1 \leq N\alpha \leq N} c(\alpha) \chi(\alpha) (N\alpha)^{-s_{\chi,1}} \right|^2 << \\ \{Q^{2T(\log N)^{3n}} + Q^{\frac{2r}{n}} \cdot T^r \cdot N^{1-\frac{r}{n}} \cdot (\log N)^{3r} + N\} \{1 + \delta^{-1} \log N\} \cdot \log N \cdot \\ \cdot \sum_{1 \leq N\alpha \leq N} |c(\alpha)|^2 (N\alpha)^{-2\sigma_0},$$

wobei $1 \leq r \leq n$ eine reelle Zahl ist.

Beweis: Man unterteile zunächst das Intervall $[1, N]$ in Teilintervalle der Form $(m, 2m]$ und setze $c(\alpha) = 0$ für $N\alpha > N$.

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
 (3.10) \quad & \left| \sum_{1 \leq N\alpha \leq N} c(\alpha) \chi(\alpha) (N\alpha)^{-s} \chi_{,1} \right|^2 \\
 &= \left| \sum_{0 \leq i \leq \left\lceil \frac{\log N}{\log 2} \right\rceil + 1} \sum_{2^{i-1} < N\alpha \leq 2^i} c(\alpha) \chi(\alpha) (N\alpha)^{-s} \chi_{,1} \right|^2 \\
 &<< \log N \sum_{0 \leq i \leq \left\lceil \frac{\log N}{\log 2} \right\rceil + 1} \left| \sum_{2^{i-1} < N\alpha \leq 2^i} c(\alpha) \chi(\alpha) (N\alpha)^{-s} \chi_{,1} \right|^2.
 \end{aligned}$$

Es genügt deshalb zu zeigen:

$$\begin{aligned}
 (3.11) \quad & \sum_{N\alpha \leq Q} \sum_{\chi \bmod q}^* \left| \sum_{l=1}^{R_\chi} \sum_{M \leq N\alpha \leq 2M} c(\alpha) \chi(\alpha) (N\alpha)^{-s} \chi_{,1} \right|^2 \\
 &<< \{Q^2 T(\log M)^{3n} + Q^{\frac{2r}{n}} \cdot T^r \cdot M^{1-\frac{r}{n}} \cdot (\log M)^{3r} + M\} \{1 + \delta^{-1} \log M\} \cdot \\
 &\quad \sum_{M \leq N\alpha \leq 2M} |c(\alpha)|^2 (N\alpha)^{-2\sigma_0},
 \end{aligned}$$

denn dann folgt mit (3.10) die Behauptung.

Zur Abkürzung setze man

$$P^*(s_{\chi,1}, \chi) = \sum_{M \leq N\alpha \leq 2M} c(\alpha) \chi(\alpha) (N\alpha)^{-s} \chi_{,1}$$

und wende Lemma 3.2 an mit

$$\alpha = \sigma_0, \quad N = 2M,$$

$$l(\alpha) = e^{-\left(\frac{N\alpha}{2N}\right) \log N} - e^{-\left(\frac{N\alpha}{N}\right) \log N}$$

$$\text{und } c(\alpha) = 0 \quad \text{für } 1 \leq N\alpha \leq M.$$

Die Voraussetzungen sind nach Lemma 3.3 erfüllt, und es folgt:

$$\sum_{Nq \leq Q} \sum_{x \bmod q}^* \sum_{l=1}^{R_X} |P^*(s_{X,l}, X)|^2 \ll \sum_{M \leq Nq \leq 2M} |c(\sigma)|^2 (Nq)^{-2\sigma_0}.$$

$$\cdot \max_{q, X, l} \sum_{Nq' \leq Q} \sum_{x' \bmod q'}^* \sum_{l'=1}^{R_{X'}} |K(\bar{s}_{X, l+s_{X', l'}, -2\sigma_0, \bar{X}X'})|,$$

wobei
$$K(s, X) = \sum_{\sigma} 1(\sigma) \chi(\sigma) (Nq)^{-s}.$$

1. Fall:
$$Q^2 \cdot T^n \leq \frac{(2\pi)^n}{d} (6n)^{-n} \cdot 2M \cdot (\log 2M)^{-3n}$$

$K(\bar{s}_{X, l+s_{X', l'}, -2\sigma_0, \bar{X}X')$ läßt sich mit Hilfe von Lemma 3.4 abschätzen. Die Voraussetzungen sind erfüllt, denn

$$\operatorname{Re}(\bar{s}_{X, l+s_{X', l'}, -2\sigma_0}) = \sigma_{X, l} + \sigma_{X', l'} - 2\sigma_0 \geq 0,$$

$$|t_{X', l'} - t_{X, l}| + 1 \leq 1 + \max_{q, X, l} t_{X, l} - \min_{q, X, l} t_{X, l} = T,$$

$\bar{X}X'$ ist ein Charakter zum Modul $q \cdot q'$ und $N(qq') \leq Q^2$.

Man erhält

$$K(\bar{s}_{X, l+s_{X', l'}, -2\sigma_0, \bar{X}X'}) \ll 1 + \varepsilon(\bar{X}X') M e^{-|t_{X', l'} - t_{X, l}| (\log 2M)^{-1}}$$

und folglich

$$\sum_{Nq \leq Q} \sum_{x \bmod q}^* \sum_{l=1}^{R_X} |P^*(s_{X,l}, X)|^2 \ll \sum_{M \leq Nq \leq 2M} |c(\sigma)|^2 (Nq)^{-2\sigma_0}.$$

$$\cdot \left\{ \sum_{Nq' \leq Q} \sum_{x' \bmod q'}^* \sum_{l'=1}^{R_{X'}} 1 + \max_{q, X, l} \sum_{Nq' \leq Q} \sum_{x' \bmod q'}^* \sum_{l'=1}^{R_{X'}} \varepsilon(\bar{X}X') \cdot M \cdot e^{-|t_{X', l'} - t_{X, l}| (\log 2M)^{-1}} \right\}.$$

χ und χ' sind primitive Charaktere mod q bzw. mod q' .
Man kann χ, χ' nach dem Modul $q \cdot q'$ erklären.

Sei zunächst $q = q'$ und $\chi = \chi'$; dann folgt:

$\bar{\chi}\chi'$ ist Hauptcharakter mod q und somit auch mod $q \cdot q'$.

Sei umgekehrt $\chi(\alpha) = \chi'(\alpha)$ für alle $(\alpha, q \cdot q') = 1$.

Die primitiven Charaktere χ mod q und χ' mod q' liefern dann denselben Charakter mod $q \cdot q'$.

Da jedoch jeder Charakter mod u primitiver Charakter modulo genau eines Teilers von u ist, folgt $q = q'$ und $\chi = \chi'$.

Es gilt also $\epsilon(\bar{\chi}\chi') = 1$ genau dann, wenn $\chi = \chi'$ ist.

Somit ergibt sich

$$\sum_{Nq \leq Q} \sum_{\chi \bmod q}^* \sum_{l=1}^R |P^*(s_{\chi,1}, \chi)|^2 \ll \sum_{M \leq Nq \leq 2M} |c(\alpha)|^2 (Nq)^{-2\sigma_0}.$$

$$\cdot \left\{ \sum_{Nq \leq Q} \sum_{\chi \bmod q}^* \sum_{l=1}^R 1 + M \cdot \max_{q, \chi, l} \sum_{l'=1}^R e^{-|t_{\chi,1} - t_{\chi,l'}|} (\log 2M)^{-1} \right\}.$$

Es soll jetzt $\sum_{Nq \leq Q} \sum_{\chi \bmod q}^* \sum_{l=1}^R 1$ behandelt werden.

Nach [7] und [2] gilt:

$$\sum_{Nq \leq Q} 1 \ll Q$$

$$\sum_{\chi \bmod q}^* 1 \leq \sum_{\chi \bmod q} 1 = h(q) \ll Nq \leq Q.$$

Es sei $t_{\chi,1} < t_{\chi,2} < \dots < t_{\chi,R_\chi}$; dann folgt

$$\text{wegen} \quad \delta = \min_{q, \chi, j \neq k} |t_{\chi,j} - t_{\chi,k}|$$

$$t_{\chi,R_\chi} - t_{\chi,1} \geq (R_\chi - 1) \delta.$$

Man erhält somit

$$R_X \leq \delta^{-1} \cdot (t_{X,R_X} - t_{X,1}) + 1 \leq \delta^{-1}(T-1) + 1 \leq T(1+\delta^{-1}).$$

Insgesamt ergibt sich

$$\sum_{N_Q \leq Q} \sum_{X \bmod Q}^* \sum_{l=1}^{R_X} 1 \ll Q^2 \cdot T \cdot (1+\delta^{-1}).$$

Es bleibt noch die Summe

$$\sum_{l'=1}^{R_X} e^{-|t_{X,l'} - t_{X,l}|(\log 2M)^{-1}} \quad \text{abzuschätzen.}$$

O.B.d.A. sei

$$t_{X,1} < t_{X,2} < \dots < t_{X,R_X};$$

dann gilt für $R_X > 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{l'=1}^{R_X} e^{-|t_{X,l'} - t_{X,l}|(\log 2M)^{-1}} &= \sum_{l'=1}^1 e^{-|t_{X,l'} - t_{X,l}|(\log 2M)^{-1}} \\ &+ \sum_{l'=1+1}^{R_X} e^{-|t_{X,l'} - t_{X,l}|(\log 2M)^{-1}}. \end{aligned}$$

Die letzten beiden Summen lassen sich wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned} \sum_{l'=1}^1 e^{-|t_{X,l'} - t_{X,l}|(\log 2M)^{-1}} &= 1 + \sum_{l'=1}^{1-1} e^{-(t_{X,l'} - t_{X,l})(\log 2M)^{-1}} \\ &\leq 1 + \sum_{l'=1}^{1-1} \frac{1}{t_{X,l'+1} - t_{X,l'}} \int_{t_{X,l'}}^{t_{X,l'+1}} e^{-(t_{X,l'} - t)(\log 2M)^{-1}} dt \\ &\leq 1 + \delta^{-1} \int_{t_{X,1}}^{t_{X,1}} e^{-(t_{X,1} - t)(\log 2M)^{-1}} dt \\ &\ll 1 + \delta^{-1} \cdot \log M. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{l'=1+1}^{R_X} e^{-|t_{X,1}-t_{X,l}|(\log 2M)^{-1}} &\leq \sum_{l'=1+1}^{R_X} \frac{1}{t_{X,1}-t_{X,l'-1}} \cdot \\
 &\cdot \int_{t_{X,1'-1}}^{t_{X,1'}} e^{-(t-t_{X,1})(\log 2M)^{-1}} dt \\
 &\leq \delta^{-1} \cdot \int_{t_{X,1}}^{t_{X,R_X}} e^{-(t-t_{X,1})(\log 2M)^{-1}} dt \\
 &\ll \delta^{-1} \cdot \log M .
 \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich schließlich im 1. Fall:

$$\begin{aligned}
 (3.12) \quad \sum_{Nq \leq Q} \sum_{x \bmod q}^* \sum_{l=1}^{R_X} |P^*(s_{X,1}, x)|^2 &\ll (Q^2 T + M) \cdot \\
 &\cdot (1 + \delta^{-1} \log M) \sum_{M \leq N_{\alpha} \leq 2M} |c(\alpha)|^2 (N_{\alpha})^{-2\sigma_0} .
 \end{aligned}$$

2. Fall: $2^n \cdot Q^2 \leq \frac{(2\pi)^n}{d} (6n)^{-n} \cdot 2M \cdot (\log 2M)^{-3n} \leq Q^2 \cdot T^n$

Man setze

$$(H+1)^n = \frac{(2\pi)^n}{d} (6n)^{-n} \cdot 2M \cdot (\log 2M)^{-3n} \cdot Q^{-2}$$

dann folgt $1 \leq H \leq T-1 < T$.

Man unterteile das Intervall $I = (\min t_{X,1}, \max t_{X,1})$ in $\ll T H^{-1}$ Teilintervalle der Länge $\leq H$.

Wegen $Q^2 (H+1)^n = \frac{(2\pi)^n}{d} (6n)^{-n} \cdot 2M \cdot (\log 2M)^{-3n}$ kann man Fall 1 auf jedes der Teilintervalle anwenden und erhält

$$\begin{aligned}
 (3.13) \quad \sum_{Nq \leq Q} \sum_{x \bmod q}^* \sum_{l=1}^{R_X} |P^*(s_{X,1}, x)|^2 &\ll \frac{T}{H} (Q^2 H + M) \cdot \\
 &\cdot (1 + \delta^{-1} \log M) \cdot \sum_{M \leq N_{\alpha} \leq 2M} |c(\alpha)|^2 (N_{\alpha})^{-2\sigma_0}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &<< (Q^2 T + T^r \cdot H^{-r} \cdot M) (1 + \delta^{-1} \log M) \sum_{M \leq N\alpha \leq 2M} |c(\alpha)|^2 (N\alpha)^{-2\sigma_0} \\
 &<< (Q^2 T + Q^{\frac{2r}{n}} \cdot T^r \cdot M^{1-\frac{r}{n}} \cdot (\log M)^{3r}) (1 + \delta^{-1} \cdot \log M) \cdot \\
 &\quad \cdot \sum_{M \leq N\alpha \leq 2M} |c(\alpha)|^2 (N\alpha)^{-2\sigma_0},
 \end{aligned}$$

wobei $1 \leq r \leq n$ eine beliebige reelle Zahl ist.

3. Fall: $2^n \cdot Q^2 \geq \frac{(2\pi)^n}{d} (6n)^{-n} \cdot 2M \cdot (\log 2M)^{-3n}$

Man unterteile das Intervall $I = (\min t_{\chi,1}, \max t_{\chi,1})$ in $T \cdot \rho^{-1}$ Teilintervalle I_h der Länge

$$\leq \rho = \min(1, \frac{\delta}{2}) .$$

Für jeden primitiven Charakter $\chi \bmod q$ liegt bei festem q wegen

$$\delta = \min_{q, \chi, j \neq k} |t_{\chi,j} - t_{\chi,k}|$$

in jedem Teilintervall I_h höchstens ein $t_{\chi,1}$ und außerdem existiert wegen $\rho \leq 1$ eine Zahl b mit

$$b \leq t_{\chi,1} \leq b+1 \quad \text{für alle } t_{\chi,1} \in I_h .$$

Es gilt: $\rho^{-1} << 1 + \delta^{-1}$.

Nach Lemma 3.5 folgt somit

$$\begin{aligned}
 (3.14) \quad &\sum_{Nq \leq Q} \sum_{\chi \bmod q}^* \sum_{l=1}^R |P^*(s_{\chi,1}, \chi)|^2 \\
 &\leq \sum_{h \leq \frac{T}{\rho}} \sum_{Nq \leq Q} \sum_{\chi \bmod q}^* |P^*(s_{\chi,1}, \chi)|^2 \\
 &\quad t_{\chi,1} \in I_h
 \end{aligned}$$

$$<< T \cdot p^{-1} \cdot (Q^2 + M) \sum_{M \leq N\alpha \leq 2M} |c(\alpha)|^2 (N\alpha)^{-2\sigma_0}$$

$$<< (Q^2 T + MT)(1 + \delta^{-1}) \sum_{M \leq N\alpha \leq 2M} |c(\alpha)|^2 (N\alpha)^{-2\sigma_0}$$

$$<< Q^2 T \cdot (\log M)^{3n} (1 + \delta^{-1}) \sum_{M \leq N\alpha \leq 2M} |c(\alpha)|^2 (N\alpha)^{-2\sigma_0}.$$

Aus (3.12), (3.13) und (3.14) ergibt sich (3.11).

Mit Hilfe von Lemma 3.2 lassen sich auch andere Abschätzungen für Ausdrücke der Form (3.1) beweisen. Sie liefern obere Schranken für die Anzahl der Tripel (q, χ, s) , für die

$$\left| \sum_{1 \leq N\alpha \leq N} c(\alpha) \chi(\alpha) (N\alpha)^{-s} \right| \geq V \quad \text{gilt.}$$

Zum Beweis der Hauptsätze benötigt man die folgenden Lemmata.

Lemma 3.6: Es sei χ ein Charakter der engeren Idealklassengruppe modulo q , der nicht der Hauptcharakter ist.

Dann gilt:

$$\zeta_K(1 + it, \chi) << \log\{Nq \cdot (|t| + 2)\}.$$

Beweis: Man benötigt das von Landau [9] auf Zahlkörper verallgemeinerte Lemma von Pólya-Vinogradov:

$$(3.15) \quad \sum_{N\alpha \leq x} \chi(\alpha) \ll (Nq)^{\frac{1}{n+1}} (\log Nq)^n x^{1 - \frac{2}{n+1}}.$$

Zunächst gilt wegen (3.15) für $\sigma = \operatorname{Re} s > 1 - \frac{2}{n+1}$:

$$\begin{aligned} \zeta_K(s, \chi) &= \sum_{\alpha} \chi(\alpha) (N\alpha)^{-s} \\ &= \sum_{N\alpha \leq N-1} \chi(\alpha) (N\alpha)^{-s} + \sum_{N \leq N\alpha} \chi(\alpha) (N\alpha)^{-s}. \end{aligned}$$

Partielle Summation ergibt mit (3.15) :

$$\begin{aligned} \sum_{N \leq N\alpha \leq x} \chi(\alpha) (N\alpha)^{-s} &= x^{-s} \sum_{N \leq N\alpha \leq x} \chi(\alpha) + s \cdot \int_N^x u^{-s-1} \sum_{N \leq N\alpha \leq u} \chi(\alpha) du \\ &= s \cdot \int_N^x u^{-s-1} \sum_{N \leq N\alpha \leq u} \chi(\alpha) du + O(x^{1 - \frac{2}{n+1} - \sigma} (Nq)^{\frac{1}{n+1}} (\log Nq)^n). \end{aligned}$$

Für $\sigma = 1$ und $x \rightarrow \infty$ folgt:

$$\begin{aligned} \zeta_K(1+it, \chi) &= \sum_{N\alpha \leq N-1} \chi(\alpha) (N\alpha)^{-1-it} + (1+it) \int_N^{\infty} u^{-2-it} \sum_{N \leq N\alpha \leq u} \chi(\alpha) du \\ &\ll \sum_{N\alpha \leq N-1} (N\alpha)^{-1} + (|t|+1) (Nq)^{\frac{1}{n+1}} (\log Nq)^n \int_N^{\infty} u^{-1 - \frac{2}{n+1}} du \\ &\ll \log N + (|t|+1) (Nq)^{\frac{1}{n+1}} (\log Nq)^n N^{-\frac{2}{n+1}}. \end{aligned}$$

Man setze $N^2 = Nq \cdot (\log Nq)^{n(n+1)} (|t|+1)^{n+1}$; dann ergibt sich

$$\begin{aligned} \zeta_K(1+it, \chi) &\ll \log\{Nq \cdot (|t|+1)\} + 1 \\ &\ll \log\{Nq \cdot (|t|+2)\}. \end{aligned}$$

Lemma 3.7 : Es sei χ ein Charakter der engeren Idealklassengruppe modulo $\mathfrak{o}$ und $s = \sigma + it$ eine komplexe Zahl.

Dann gilt im Streifen $0 \leq \sigma \leq 2$:

$$\zeta_K(s, \chi)(s-1)^{\varepsilon(\chi)} \ll (N\mathfrak{o})^{\frac{1}{2}} \cdot (|t|+1)^{\frac{n}{2} + \varepsilon(\chi)} \cdot \log\{N\mathfrak{o} \cdot (|t|+2)\} ,$$

$$\text{wobei} \quad \varepsilon(\chi) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \chi = \chi_0 \text{ Hauptcharakter mod } \mathfrak{o} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Beweis: Die Funktion $\zeta_K(s, \chi)(s-1)^{\varepsilon(\chi)}$ ist im Streifen $0 \leq \sigma \leq 2$ regulär und auf der Geraden $\sigma=2$ gilt:

$$\zeta_K(s, \chi)(s-1)^{\varepsilon(\chi)} \ll (|t|+1)^{\varepsilon(\chi)} .$$

Es sei zunächst $\chi = \chi_0$; dann erhält man für $\sigma=0$:

$$\begin{aligned} \zeta_K(it, \chi_0) &= \prod_{\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{o}} (1 - (N\mathfrak{p})^{-it}) \zeta_K(it) \\ &\ll \sum_{\mathfrak{a} \nmid \mathfrak{o}} \frac{1}{|\mathfrak{a}|} \cdot |t|^{\frac{n}{2}} \cdot \zeta_K(1-it) \\ &\ll (N\mathfrak{o})^{\frac{1}{2}} \cdot |t|^{\frac{n}{2}} \cdot \log(|t|+2) . \end{aligned}$$

Dabei wurde die Funktionalgleichung für $\zeta_K(s)$ benutzt, und der letzte Schritt folgt nach [6;34.] .

Falls $\chi \neq \chi_0$ ist, dann verfährt man wie im Beweis zu Lemma 3.4 :

Sei $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}_1 \cdot \mathfrak{o}_2$, $\mathfrak{o}_1$ der Führer von χ und χ_1 der zugehörige primitive Charakter mod $\mathfrak{o}_1$.

Es ergibt sich für $\sigma=0$ mit Lemma 3.6 :

$$\begin{aligned} \zeta_K(it, \chi) &= \prod_{\rho/q} (1 - \chi_1(\rho)(N\rho)^{-it}) \zeta_K(it, \chi_1) \\ &< \sum_{\alpha/q_2} 1 \cdot (Nq_1)^{\frac{1}{2}} \cdot |t|^{\frac{n}{2}} \cdot \zeta_K(1-it, \bar{\chi}_1) \\ &< (Nq)^{\frac{1}{2}} (|t|+1)^{\frac{n}{2}} \cdot \log\{Nq \cdot (|t|+2)\} . \end{aligned}$$

Insgesamt erhält man also auf der Geraden $\sigma=0$:

$$\zeta_K(s, \chi)(s-1)^{\varepsilon(\chi)} < (Nq)^{\frac{1}{2}} (|t|+1)^{\frac{n}{2}+\varepsilon(\chi)} \cdot \log\{Nq(|t|+2)\} .$$

Schließlich gilt im Streifen $0 \leq \sigma \leq 2$

$$|\zeta_K(s, \chi)(s-1)^{\varepsilon(\chi)}| \leq c_1 e^{c_2 |t|} ,$$

wobei c_1, c_2 von t und σ unabhängige positive Konstanten sind.

Nach einem Satz von Phragmén-Lindelöf, siehe [14; Anhang, Satz 7.2], folgt somit

$$\zeta_K(s, \chi)(s-1)^{\varepsilon(\chi)} < (Nq)^{\frac{1}{2}} (|t|+1)^{\frac{n}{2}+\varepsilon(\chi)} \cdot \log\{Nq(|t|+2)\}$$

im ganzen Bereich $0 \leq \sigma \leq 2$.

Lemma 3.8 : Es sei χ ein Charakter der engeren Idealklassengruppe modulo q und $s = \sigma + it$, $\sigma \geq 0$, eine komplexe Zahl.

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} e^{-\frac{N\alpha}{N}} \chi(\alpha)(N\alpha)^{-s} &< \{Nq(|t|+1)^n\}^{\frac{1}{2}} \cdot \log\{Nq(|t|+2)\} + \\ &+ \varepsilon(\chi) \cdot N \cdot e^{-|t|} , \end{aligned}$$

wobei $\varepsilon(\chi) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \chi = \chi_0 \text{ Hauptcharakter mod } q \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.

Beweis: 1) Es sei $\sigma > 2$; dann folgt

$$\sum_{\alpha} e^{-\frac{N\alpha}{N}} \chi(\alpha) (N\alpha)^{-s} \ll \sum_{\alpha} (N\alpha)^{-2} \ll 1.$$

2) Es sei $0 \leq \sigma \leq 2$; dann gilt zunächst

$$\sum_{\alpha} e^{-\frac{N\alpha}{N}} \chi(\alpha) (N\alpha)^{-s} = \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \zeta_K(s+w, \chi) \Gamma(w) N^w dw.$$

a) Falls $|t| \leq 1$, $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 2$, $\chi = \chi_0$, dann folgt nach dem Residuensatz

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} e^{-\frac{N\alpha}{N}} \chi_0(\alpha) (N\alpha)^{-s} &\ll \sum_{\alpha} e^{-\frac{N\alpha}{N}} (N\alpha)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \zeta_K\left(\frac{1}{2}+w\right) \Gamma(w) N^w dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \zeta_K\left(\frac{1}{2}+w\right) \Gamma(w) N^w dw \\ &\ll N \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(1+iu)| du \\ &\ll N \int_0^{\infty} e^{-u} du \ll N e^{-|t|}. \end{aligned}$$

b) Andernfalls wende man den Residuensatz auf das Rechteck R mit den Ecken $2+iT$ und $\pm iT$ an. Man ändere den geradlinigen Integrationsweg von

it bis $-it$ ab durch einen kleinen Halbkreis um $w=0$ und, falls $\operatorname{Re} s = 1$ und $\chi = \chi_0$, durch einen kleinen Halbkreis um die Singularität bei $w=1-s$ und lasse deren Radien gegen Null streben.

Der Integrand $\zeta_K(s+w, \chi) \Gamma(w) N^w$ ist in R regulär bis auf einfache Pole bei $w=0$ und, falls χ Hauptcharakter mod $\mathfrak{q}$ ist, bei $w=1-s$ mit den Residuen

$$\ll |\zeta_K(s, \chi)|$$

und

$$\ll \frac{\phi(\mathfrak{q})}{N\mathfrak{q}} \cdot N \cdot |\Gamma(1-s)| \ll N e^{-|t|}.$$

Man erhält also

$$\sum_{\alpha} e^{-\frac{N\alpha}{N}} \chi(\alpha) (N\alpha)^{-s} \ll |\zeta_K(s, \chi)| + \epsilon(\chi) N e^{-|t|} + \int_{-i\infty}^{i\infty} |\zeta_K(s+w, \chi) \Gamma(w) N^w| |dw|.$$

Nach Lemma 3.7 folgt wegen $|s-1| \geq |t| \geq \frac{1}{2}(|t|+1)$ für $|t| \geq 1$ und $|s-1| \geq |\sigma-1| \geq \frac{1}{2} \geq \frac{1}{4}(|t|+1)$ für $|t| \leq 1$, $0 \leq \sigma \leq \frac{1}{2}$:

$$\zeta_K(s, \chi) \ll (N\mathfrak{q})^{\frac{1}{2}} (|t|+1)^{\frac{n}{2}} \log\{N\mathfrak{q}(|t|+2)\}$$

und somit

$$\sum_{\alpha} e^{-\frac{N\alpha}{N}} \chi(\alpha) (N\alpha)^{-s} \ll (N\mathfrak{q})^{\frac{1}{2}} \cdot (|t|+1)^{\frac{n}{2}} \cdot \log\{N\mathfrak{q}(|t|+2)\} + \epsilon(\chi) N e^{-|t|} + (N\mathfrak{q})^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} (|t+u|+1)^{\frac{n}{2}} \log\{N\mathfrak{q}(|t+u|+2)\} |\Gamma(iu)| du.$$

Es soll jetzt das letzte Integral behandelt werden.

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} (|t+u|+1)^{\frac{n}{2}} \cdot \log\{Nq(|t+u|+2)\} \cdot |\Gamma(iu)| \, du \\ & \ll (|t|+1)^{\frac{n}{2}} \log\{Nq(|t|+2)\} \int_{-\infty}^{\infty} |u|^{\frac{n}{2}+1} e^{-|u|} \, du \\ & \ll (|t|+1)^{\frac{n}{2}} \cdot \log\{Nq(|t|+2)\} . \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich schließlich die Behauptung.

Lemma 3.9 : Es sei $\zeta_K(s)$ die Dedekindsche Zetafunktion und

$$\begin{aligned} m(a,T) = \max_{\substack{\sigma \geq a \\ |t| \leq T \\ |s-1| \geq 1}} |\zeta_K(s)| \quad , \quad s = \sigma + it . \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\sum_{\alpha} \left(e^{-\frac{N\alpha}{2N}} - e^{-\frac{N\alpha}{N}} \right) (N\alpha)^{-it} \ll N^r \cdot m(r, 2|t|) + N e^{-|t|} ,$$

wobei $0 \leq r \leq 1$ eine beliebige reelle Zahl ist.

Beweis: Zunächst gilt:

$$\sum_{\alpha} \left(e^{-\frac{N\alpha}{2N}} - e^{-\frac{N\alpha}{N}} \right) (N\alpha)^{-it} = \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \zeta_K(w+it) \Gamma(w) ((2N)^w - N^w) dw .$$

Man wende den Residuensatz auf das Rechteck R mit den Ecken $2 \pm iT$ und $r \pm iT$ an.

Falls $r=1$ ist, ändere man den Integrationsweg ab durch einen kleinen Halbkreis um die Singularität bei $w=1-it$.

Es folgt somit

$$\sum_{\sigma} \left(e^{-\frac{N\sigma}{2N}} - e^{-\frac{N\sigma}{N}} \right) (N\sigma)^{-it} \ll N \cdot \Gamma(1-it) +$$

$$+ N^r \cdot \int_{r-i\infty}^{r+i\infty} |\zeta_K(w+it)\Gamma(w)| |dw|$$

$$\ll N e^{-|t|} + N^r \int_{-\infty}^{\infty} |\zeta_K(r+it+iu)| |\Gamma(r+iu)| du$$

Für $|u| \leq |t|$ läßt sich der Integrand abschätzen durch

$$\ll m(r, 2|t|) e^{-|u|}.$$

Andernfalls erhält man wegen

$$\zeta_K(s) = O(|t|^n) \quad \text{für } \sigma \geq -\frac{1}{2}, \quad [7; \text{Satz 169}] :$$

$$|\zeta_K(r+it+iu)| |\Gamma(r+iu)| \ll (|t|+|u|)^n e^{-\frac{\pi}{2}|u|} \cdot |u|^{\frac{1}{2}}$$

$$\ll |u|^{n+\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi}{2}|u|}$$

$$\ll e^{-|u|} m(r, |t|).$$

Schließlich ergibt sich

$$\sum_{\sigma} \left(e^{-\frac{N\sigma}{2N}} - e^{-\frac{N\sigma}{N}} \right) (N\sigma)^{-it} \ll N e^{-|t|} + N^r \cdot m(r, 2|t|) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|u|} du$$

$$\ll N e^{-|t|} + N^r \cdot m(r, 2|t|).$$

Nach diesen Vorbereitungen lassen sich jetzt die von Montgomery in [13; Chapter 8] für den Körper der rationalen Zahlen bewiesenen Sätze unmittelbar auf Zahlkörper übertragen.

Satz 3.2 : Es sei $\mathcal{M}$ eine endliche Menge von Tripeln $(q, \chi, s) = (q, \chi \bmod q, s)$, wobei χ primitive Charaktere der engeren Idealklassengruppen modulo q , $Nq \leq Q$, sind.

$|\mathcal{M}|$ bezeichne die Anzahl der Elemente von $\mathcal{M}$.
Ferner sei

$$\sigma_0 = \min_{(q, \chi, s) \in \mathcal{M}} \sigma, \quad s = \sigma + it,$$

und $|t - t'| \geq \delta > 0$ für verschiedene Tripel $(q, \chi, \sigma + it)$ und $(q, \chi, \sigma' + it')$ aus $\mathcal{M}$.

Schließlich seien $T_0, T \geq 2$ reelle Zahlen mit der Eigenschaft

$$T_0 \leq t \leq T_0 + T$$

für alle Tripel $(q, \chi, \sigma + it) \in \mathcal{M}$.

Dann gilt:

$$\sum_{(q, \chi, s) \in \mathcal{M}} \left| \sum_{1 \leq Nq \leq N} c(\alpha) \chi(\alpha) (Nq)^{-s} \right|^2 \ll \{(1 + \delta^{-1}) \cdot N + |\mathcal{M}| \cdot Q \cdot T^{\frac{n}{2}} \cdot \log QT\} \sum_{1 \leq Nq \leq N} |c(\alpha)|^2 (Nq)^{-2\sigma_0}.$$

Beweis: Man setze

$$P(s, \chi) = \sum_{1 \leq Nq \leq N} c(\alpha) \chi(\alpha) (Nq)^{-s}$$

und wende Lemma 3.2 an mit $\alpha = \sigma_0$, $l(\alpha) = e^{-\frac{Nq}{N}}$.

Die Voraussetzungen sind wegen

$$\sum_{\alpha} e^{-\frac{N\alpha}{N}} < \infty$$

und $e^{-\frac{N\alpha}{N}} \gg 1$ für $1 \leq N\alpha \leq N$

erfüllt, und es ergibt sich

$$\sum_{(\alpha, \chi, s) \in \mathcal{H}} |P(s, \chi)|^2 \ll \left(\sum_{1 \leq N\alpha \leq N} |c(\alpha)|^2 (N\alpha)^{-2\sigma_0} \right)$$

$$\max_{(\alpha, \chi, s) \in \mathcal{H}} \sum_{(\alpha', \chi', s') \in \mathcal{H}} |K(\bar{s} + s' - 2\sigma_0, \bar{\chi}\chi')|, \text{ ,}$$

wobei $K(s, \chi) = \sum_{\alpha} e^{-\frac{N\alpha}{N}} \chi(\alpha) (N\alpha)^{-s}.$

Nach Lemma 3.8 folgt:

$$|K(\bar{s} + s' - 2\sigma_0, \bar{\chi}\chi')| \ll Q(|t' - t| + 1)^{\frac{n}{2}} \cdot \log\{Q^2(|t' - t| + 2)\} + \\ + \varepsilon(\bar{\chi}\chi') \cdot N \cdot e^{-|t' - t|},$$

weil $\bar{\chi}\chi'$ ein Charakter zum Modul $\alpha\alpha'$ ist mit $N(\alpha\alpha') \leq Q^2$ und $\operatorname{Re}(\bar{s} + s' - 2\sigma_0) \geq 0$.

Da χ und χ' primitive Charaktere mod α bzw. mod α' sind, ist $\bar{\chi}\chi'$ genau dann Hauptcharakter, wenn $\chi = \chi'$ gilt.

Man verfährt wie im Beweis zu Satz 3.1 und erhält

$$\sum_{(\alpha, \chi, s) \in \mathcal{H}} |P(s, \chi)|^2 \ll \left(\sum_{1 \leq N\alpha \leq N} |c(\alpha)|^2 (N\alpha)^{-2\sigma_0} \right) \cdot$$

$$\cdot \left(\sum_{(\alpha, \chi, s) \in \mathcal{H}} Q \cdot T^{\frac{n}{2}} \cdot \log QT + N \sum_{t'} e^{-|t - t'|} \right)$$

$$\ll \left(\sum_{1 \leq N\alpha \leq N} |c(\alpha)|^2 (N\alpha)^{-2\sigma_0} \right) (|\mathcal{H}| Q \cdot T^{\frac{n}{2}} \cdot \log QT + N(1 + \delta^{-1}))$$

wegen $|t-t'| \geq \delta$ für verschiedene Tripel $(q, \chi, \sigma+it)$
und $(q, \chi, \sigma'+it')$ aus $\mathcal{M}$.

Korollar 3.2 : Die Voraussetzungen von Satz 3.2 seien erfüllt; dann gilt:

$$\sum_{(q, \chi, s) \in \mathcal{M}} \left| \sum_{1 \leq N\alpha \leq N} c(\alpha) \chi(\alpha) (N\alpha)^{-s} \right|^2 << (1+\delta^{-1}) \cdot \\ \cdot (Q^3 \cdot T^{\frac{n}{2}+1} \log QT + N) \sum_{1 \leq N\alpha \leq N} |c(\alpha)|^2 (N\alpha)^{-2\sigma_0}.$$

Der Beweis folgt unmittelbar aus Satz 3.2 wegen

$$|\mathcal{M}| << Q^2 \cdot T \cdot (1+\delta^{-1}).$$

Satz 3.3 : Es sei $\mathcal{M}$ eine endliche Menge von komplexen Zahlen $s = \sigma+it$; $|\mathcal{M}|$ bezeichne die Anzahl der Elemente von $\mathcal{M}$.

Ferner sei

$$\sigma_0 = \min_{s \in \mathcal{M}} \sigma$$

und $|t-t'| \geq \delta > 0$ für verschiedene Elemente $s = \sigma+it$ und $s' = \sigma'+it'$ aus $\mathcal{M}$.

Schließlich seien $T_0, T \geq 2$ reelle Zahlen mit der Eigenschaft

$$T_0 \leq t \leq T_0 + T$$

für alle $s = \sigma+it$ aus $\mathcal{M}$.

Dann gilt:

$$\sum_{s \in \mathbb{Z}} \left| \sum_{N \leq N_{\alpha} \leq 2N} c(\alpha) (N_{\alpha})^{-s} \right|^2 \ll \{N(1+\delta^{-1}) +$$

$$+ |\mathbb{Z}| \cdot N^r \cdot m(r, 4T)\} \sum_{N \leq N_{\alpha} \leq 2N} |c(\alpha)|^2 (N_{\alpha})^{-2\sigma_0},$$

wobei $m(a, T) = \max_{\substack{\sigma \geq a \\ |t| \leq T \\ |s-1| \geq 1}} |\zeta_K(s)|$ und $0 \leq r \leq 1$.

Beweis: Man setze

$$l(\alpha) = e^{-\frac{N_{\alpha}}{2N}} - e^{-\frac{N_{\alpha}}{N}};$$

dann ergibt sich mit Lemma 3.2, Lemma 3.3 und Lemma 3.9 :

$$(3.16) \quad \sum_{s \in \mathbb{Z}} \left| \sum_{N \leq N_{\alpha} \leq 2N} c(\alpha) (N_{\alpha})^{-it} \right|^2 \ll \sum_{N \leq N_{\alpha} \leq 2N} |c(\alpha)|^2 \cdot$$

$$\cdot \{ |\mathbb{Z}| \cdot N^r \cdot m(r, 4T) + N \max_{s \in \mathbb{Z}} \sum_{t'} e^{-|t'-t|} \}$$

$$\ll \sum_{N \leq N_{\alpha} \leq 2N} |c(\alpha)|^2 \{ |\mathbb{Z}| \cdot N^r \cdot m(r, 4T) + N(1+\delta^{-1}) \},$$

wobei $0 \leq r \leq 1$ eine beliebige reelle Zahl ist.

Durch partielle Summation folgt

$$\sum_{N \leq N_{\alpha} \leq 2N} c(\alpha) (N_{\alpha})^{-s} = \sum_{N \leq N_{\alpha} \leq 2N} c(\alpha) (N_{\alpha})^{-\sigma_0} (N_{\alpha})^{-it} (2N)^{\sigma_0 - \sigma}$$

$$+ (\sigma - \sigma_0) \cdot \int_N^{2N} \xi^{-\sigma + \sigma_0 - 1} \sum_{N \leq N_{\alpha} \leq \xi} c(\alpha) (N_{\alpha})^{-\sigma_0} (N_{\alpha})^{-it} d\xi$$

$$\left| \sum_{N \leq N_{\alpha} \leq 2N} c(\alpha) (N_{\alpha})^{-s} \right|^2 << \left| \sum_{N \leq N_{\alpha} \leq 2N} c(\alpha) (N_{\alpha})^{-\sigma} o(N_{\alpha})^{-it} \right|^2 \\ + N^{-1} \int_N^{2N} \left| \sum_{N \leq N_{\alpha} \leq \xi} c(\alpha) (N_{\alpha})^{-\sigma} o(N_{\alpha})^{-it} \right|^2 d\xi.$$

Man erhält also mit (3.16) :

$$\sum_{s \in \mathcal{H}^c} \left| \sum_{N \leq N_{\alpha} \leq 2N} c(\alpha) (N_{\alpha})^{-s} \right|^2 << \sum_{s \in \mathcal{H}^c} \left| \sum_{N \leq N_{\alpha} \leq 2N} c(\alpha) (N_{\alpha})^{-\sigma} o(N_{\alpha})^{-it} \right|^2 \\ + N^{-1} \cdot \int_N^{2N} \sum_{s \in \mathcal{H}^c} \left| \sum_{N \leq N_{\alpha} \leq \xi} c(\alpha) (N_{\alpha})^{-\sigma} o(N_{\alpha})^{-it} \right|^2 d\xi \\ << \sum_{N \leq N_{\alpha} \leq 2N} |c(\alpha)|^2 (N_{\alpha})^{-2\sigma} \{ |\mathcal{H}^c| \cdot N^r \cdot m(r, 4T) + N(1+\delta^{-1}) \} \\ + N^{-1} \cdot \int_N^{2N} \sum_{s \in \mathcal{H}^c} \left| \sum_{\frac{\xi}{2} \leq N_{\alpha} \leq \xi} c(\alpha) (N_{\alpha})^{-\sigma} o(N_{\alpha})^{-it} \right|^2 d\xi,$$

wobei $c(\alpha) = 0$ für $\frac{\xi}{2} \leq N_{\alpha} < N$

$$<< \sum_{N \leq N_{\alpha} \leq 2N} |c(\alpha)|^2 (N_{\alpha})^{-2\sigma} \{ |\mathcal{H}^c| \cdot N^r \cdot m(r, 4T) + N(1+\delta^{-1}) \} \\ + N^{-1} \cdot \int_N^{2N} \{ |\mathcal{H}^c| \xi^r m(r, 4T) + \xi(1+\delta^{-1}) \} \sum_{\frac{\xi}{2} \leq N_{\alpha} \leq \xi} |c(\alpha)|^2 (N_{\alpha})^{-2\sigma} d\xi \\ << \sum_{N \leq N_{\alpha} \leq 2N} |c(\alpha)|^2 (N_{\alpha})^{-2\sigma} \{ |\mathcal{H}^c| \cdot N^r \cdot m(r, 4T) + N(1+\delta^{-1}) \}.$$

4. In diesem Paragraphen sollen erste Anwendungen der Sätze 3.2 und 3.3 angegeben werden.

Die Resultate werden später benutzt, um Abschätzungen für die Anzahl der Nullstellen der Heckschen Zeta-funktionen in gewissen Bereichen zu beweisen.

Satz 4.1 : Es seien die Voraussetzungen von Satz 3.2 erfüllt. Außerdem sei V eine reelle Zahl mit

$$(4.1) \quad V^2 \geq A \cdot Q \cdot T^{\frac{n}{2}} \cdot \log QT \sum_{1 \leq N_{\alpha} \leq N} |c(\alpha)|^2 (N_{\alpha})^{-2\sigma_0},$$

wobei A eine genügend große, nur vom Körper K abhängige Konstante ist.

Es sei ferner

$$\left| \sum_{1 \leq N_{\alpha} \leq N} c(\alpha) \chi(\alpha) (N_{\alpha})^{-s} \right| \geq V$$

für alle Tripel $(q, \chi, s) \in \mathcal{H}$.

Dann gilt:

$$(4.2) \quad |\mathcal{H}| \ll (1+\delta^{-1}) \cdot N \cdot V^{-2} \sum_{1 \leq N_{\alpha} \leq N} |c(\alpha)|^2 (N_{\alpha})^{-2\sigma_0}.$$

Beweis: Aus Satz 3.2 ergibt sich zunächst

$$V^2 |\mathcal{H}| \ll \{(1+\delta^{-1})N + |\mathcal{H}| QT^{\frac{n}{2}} \log QT\} \sum_{1 \leq N_{\alpha} \leq N} |c(\alpha)|^2 (N_{\alpha})^{-2\sigma_0}$$

und somit

$$V^2 |\mathcal{H}| \leq c \{(1+\delta^{-1})N + |\mathcal{H}| QT^{\frac{n}{2}} \log QT\} \sum_{1 \leq N_{\alpha} \leq N} |c(\alpha)|^2 (N_{\alpha})^{-2\sigma_0},$$

wobei c eine nur vom Körper K abhängige Konstante ist.

Man wähle $A \geq 2c$; dann folgt wegen (4.1) :

$$\begin{aligned} V^2 \cdot |\mathfrak{M}| &\leq c(1+\delta^{-1}) \cdot N \cdot \sum_{1 \leq N\alpha \leq N} |c(\alpha)|^2 (N\alpha)^{-2\sigma_0} + \\ &+ \frac{A}{2} |\mathfrak{M}| \cdot Q \cdot T^{\frac{n}{2}} \cdot \log QT \cdot \sum_{1 \leq N\alpha \leq N} |c(\alpha)|^2 (N\alpha)^{-2\sigma_0} \\ &\leq c(1+\delta^{-1}) \cdot N \cdot \sum_{1 \leq N\alpha \leq N} |c(\alpha)|^2 (N\alpha)^{-2\sigma_0} + \frac{1}{2} V^2 |\mathfrak{M}| . \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die Behauptung (4.2).

Unter Verwendung von Satz 3.3 kann man ebenfalls die Abschätzung (4.2) beweisen. Hierbei lautet die zusätzliche Voraussetzung

$$(4.3) \quad V^2 \geq B \cdot N^r \cdot m(r, 4T) \sum_{N \leq N\alpha \leq 2N} |c(\alpha)|^2 (N\alpha)^{-2\sigma_0} ,$$

wobei B eine hinreichend große, nur vom Körper K abhängige Konstante ist.

Der Vorteil dieser Abschätzungen im Vergleich zu Satz 3.1 zeigt sich in den folgenden Überlegungen.

Man erhält aus Satz 3.1 etwa für $N \leq Q^2 \cdot T^n$ das Resultat:

$$(4.4) \quad |\mathcal{M}| < V^{-2} \cdot Q^2 T^n (\log N)^{3n+1} (1+\delta^{-1} \log N) \cdot \sum_{1 \leq N_{\alpha} \leq N} |c(\alpha)|^2 (N_{\alpha})^{-2\sigma_0}.$$

Für hinreichend große V liefert dagegen (4.2) die Abschätzung

$$(4.5) \quad |\mathcal{M}| < V^{-2} \cdot N \cdot (1+\delta^{-1}) \cdot \sum_{1 \leq N_{\alpha} \leq N} |c(\alpha)|^2 (N_{\alpha})^{-2\sigma_0}.$$

Das Ergebnis (4.5) ist bedeutend besser als (4.4), wenn N klein gegenüber $Q^2 T^n (\log N)^{3n+1}$ ist.

Allerdings muß man die starke zusätzliche Voraussetzung

$$V^2 \geq A \cdot Q \cdot T^{\frac{n}{2}} \cdot \log QT \cdot \sum_{1 \leq N_{\alpha} \leq N} |c(\alpha)|^2 (N_{\alpha})^{-2\sigma_0}$$

berücksichtigen.

Es lassen sich jedoch trotzdem mit Hilfe der letzten Sätze neue Abschätzungen für die Anzahl der Nullstellen der Heckeschen Zetafunktionen in gewissen Bereichen beweisen.

Für den Körper der rationalen Zahlen wurde mit den entsprechenden Resultaten die Abschätzung (1.2) von Montgomery in [12] hergeleitet.

5. Es soll in diesem Paragraphen eine Abschätzung für den Ausdruck

$$\sum_{N\eta \leq Q} \sum_{\chi \bmod \eta}^* \sum_{l=1}^{R_\chi} |\zeta_K(\frac{1}{2} + it_{\chi,l}, \chi)|$$

angegeben werden. Man benötigt dazu die approximative Funktionalgleichung für die Hecke'sche Zetafunktion, die Huxley in [3] beweist.

Satz 5.1 : Es seien $Q \geq 1$, $T \geq 2$ reelle Zahlen.

Für jeden primitiven Charakter χ der engeren Idealklassengruppen modulo η , $N\eta \leq Q$, seien $t_{\chi,l}$, $l=1, \dots, R_\chi$, reelle Zahlen mit der Eigenschaft

$$-T \leq t_{\chi,1} < t_{\chi,2} < \dots < t_{\chi,R_\chi} \leq T,$$

wobei $t_{\chi,l+1} - t_{\chi,l} \geq \delta > 0$ für $l=1, \dots, R_\chi-1$.

Dann gilt:

$$\sum_{N\eta \leq Q} \sum_{\chi \bmod \eta}^* \sum_{l=1}^{R_\chi} |\zeta_K(\frac{1}{2} + it_{\chi,l}, \chi)| < Q^2 T^n (1 + \delta^{-1} \log QT) (\log QT)^{3n+5}$$

Beweis: Es gilt folgende Ungleichung, die aus der approximativen Funktionalgleichung für die Hecke'sche Zetafunktion folgt [3; 3.1] :

$$(5.1) \quad |\zeta_K(\frac{1}{2} + it_{\chi,l}, \chi)| \leq 6 \left| \sum_{N\alpha \leq eX} \frac{D(\alpha) \chi(\alpha)}{(N\alpha)^{\frac{1}{2} + it_{\chi,l}}} \cdot c(\frac{N\alpha}{X}) \right|^2$$

$$+ 6 \left| \sum_{N\alpha \leq eY} \frac{D(\alpha) \bar{\chi}(\alpha)}{(N\alpha)^{\frac{1}{2} - it_{\chi,l}}} \cdot c'(\frac{N\alpha}{Y}) \right|^2 \left| G(\frac{1}{2} - it_{\chi,l}) \right|^4$$

$$+ 6 \cdot \sum_{i=1}^4 |I_i|^2, \quad ,$$

wobei I_1, I_2, I_3 und I_4 gewisse Integrale bezeichnen.

Die Größen $c(u)$, $c'(u)$ und $G(u)$ werden bei Huxley definiert und hier übernommen. $D(\alpha)$ bezeichnet die Teilerfunktion.

Ferner sind X und Y reelle Zahlen mit der Eigenschaft

$$(5.2) \quad X \cdot Y = d^2 \cdot (Nq)^2 \cdot \left(\frac{|t_{X,1}|}{2\pi} \right)^{2n},$$

wobei d die Diskriminante des Körpers K ist.

Die Integrale I_i , $i=1, \dots, 4$, lassen sich nach Huxley [3; 2.48, 2.49, 2.50] wie folgt abschätzen:

$$|I_i| < Nq X^{-\frac{1}{2}} |t_{X,1}|^{-n-1} \log Y \quad \text{für } |t_{X,1}| \geq t_0,$$

$$|I_i| < Nq X^{-\frac{1}{2}} \log(Y+2) \quad \text{für } |t_{X,1}| < t_0,$$

wobei $t_0 = 4n+2$ ist.

1. Fall: Man fasse alle Tripel $(q, X, 1)$ zusammen, für die $|t_{X,1}| < t_0$ gilt.

Es sei $(Nq)^2 \leq X \leq 2(Nq)^2$; dannfolgt wegen (5.2):

$$0 \leq \frac{1}{2} d^2 \left(\frac{|t_{X,1}|}{2\pi} \right)^{2n} \leq Y \leq d^2 \left(\frac{|t_{X,1}|}{2\pi} \right)^{2n} \leq d^2 \cdot \left(\frac{t_0}{2\pi} \right)^{2n}.$$

Man erhält also mit (5.1):

$$\begin{aligned}
 & |\zeta_K^4(\frac{1}{2}+it_{X,1}, X)| << \left| \sum_{N\alpha \leq eX} D(\alpha) \chi(\alpha)(N\alpha)^{-\frac{1}{2}-it_{X,1}} c(\frac{N\alpha}{X}) \right|^2 \\
 & + \left| \sum_{N\alpha \leq eY} D(\alpha) \bar{\chi}(\alpha)(N\alpha)^{-\frac{1}{2}+it_{X,1}} c'(\frac{N\alpha}{Y}) \right|^2 |G(\frac{1}{2}-it_{X,1})|^4 \\
 & + (Nq)^2 \cdot (Nq)^{-2} \cdot \log^2(2+d^2(\frac{t_0}{2\pi})^{2n}) \\
 & << \left| \sum_{N\alpha \leq eX} D(\alpha) \chi(\alpha)(N\alpha)^{-\frac{1}{2}-it_{X,1}} c(\frac{N\alpha}{X}) \right|^2 \\
 & + \left| \sum_{N\alpha \leq eY} D(\alpha) \bar{\chi}(\alpha)(N\alpha)^{-\frac{1}{2}+it_{X,1}} c'(\frac{N\alpha}{Y}) \right|^2 |G(\frac{1}{2}-it_{X,1})|^4 \\
 & + 1.
 \end{aligned}$$

Hieraus folgt durch Integration nach X :

$$\begin{aligned}
 & |\zeta_K^4(\frac{1}{2}+it_{X,1}, X)| << (Nq)^{-2} \cdot \int_{(Nq)^2}^{2(Nq)^2} \left| \sum_{N\alpha \leq eX} D(\alpha) \chi(\alpha)(N\alpha)^{-\frac{1}{2}-it_{X,1}} \right. \\
 & \quad \left. \cdot c(\frac{N\alpha}{X}) \right|^2 dX \\
 & + (Nq)^{-2} \cdot \int_{\frac{1}{2}d^2(\frac{|t_{X,1}|}{2\pi})^{2n}}^{d^2(\frac{|t_{X,1}|}{2\pi})^{2n}} \left| \sum_{N\alpha \leq eY} D(\alpha) \bar{\chi}(\alpha)(N\alpha)^{-\frac{1}{2}+it_{X,1}} c'(\frac{N\alpha}{Y}) \right|^2 \cdot \\
 & \quad \cdot |G(\frac{1}{2}-it_{X,1})|^4 \frac{(Nq)^2 |t_{X,1}|^{2n}}{Y^2} dY \\
 & + 1 \\
 & << (Nq)^{-2} \cdot \int_{(Nq)^2}^{2(Nq)^2} \left| \sum_{N\alpha \leq eX} D(\alpha) \chi(\alpha)(N\alpha)^{-\frac{1}{2}-it_{X,1}} c(\frac{N\alpha}{X}) \right|^2 dX
 \end{aligned}$$

$$+ \int_{e^{-1}}^{d^2(\frac{t_0}{2\pi})^{2n}} \left| \sum_{N\alpha \leq eY} D(\alpha) \bar{\chi}(\alpha) (N\alpha)^{-\frac{1}{2}+it_{X,1}} c'(\frac{N\alpha}{Y})^2 |G(\frac{1}{2}-it_{X,1})|^4 dY \right.$$

+ 1 .

Man fasse die Ideale $\mathfrak{q}$ mit $q \leq N\mathfrak{q} \leq 2q$ zusammen und summiere über die Tripel $(\mathfrak{q}, \chi, 1)$.

Es ergibt sich

$$(5.3) \quad \sum_{q \leq N\mathfrak{q} \leq 2q} \sum_{\chi \bmod \mathfrak{q}}^* \sum_{l=1}^R \frac{\chi}{l} |t_K(\frac{1}{2}+it_{X,1}, \chi)|$$

$$<< q^{-2} \int_2^{8q^2} \sum_{q \leq N\mathfrak{q} \leq 2q} \sum_{\chi}^* \sum_{l=1}^R \frac{\chi}{l} \left| \sum_{N\alpha \leq eX} D(\alpha) \chi(\alpha) (N\alpha)^{-\frac{1}{2}-it_{X,1}} c'(\frac{N\alpha}{X})^2 dX \right|$$

$$|t_{X,1}| < t_0$$

$$+ \int_{e^{-1}}^{d^2(\frac{t_0}{2\pi})^{2n}} \sum_{q \leq N\mathfrak{q} \leq 2q} \sum_{\chi}^* \sum_{l=1}^R \frac{\chi}{l} \left| \sum_{N\alpha \leq eY} D(\alpha) \bar{\chi}(\alpha) (N\alpha)^{-\frac{1}{2}+it_{X,1}} \right.$$

$$|t_{X,1}| < t_0 \quad \cdot c'(\frac{N\alpha}{Y})^2 |G(\frac{1}{2}-it_{X,1})|^4 dY$$

$$+ \sum_{q \leq N\mathfrak{q} \leq 2q} \sum_{\chi \bmod \mathfrak{q}}^* \sum_{l=1}^R \frac{\chi}{l} 1$$

$$|t_{X,1}| < t_0$$

Der letzte Ausdruck läßt sich abschätzen durch

$$<< q^2 \cdot t_0 \cdot (1+\delta^{-1}) .$$

Es soll jetzt Satz 3.1 mit $r=n$ auf die beiden ersten Summanden angewendet werden.

Zunächst gilt wegen $c(\frac{N\alpha}{X}) \ll 1$:

$$\sum_{q \leq Nq \leq 2q} \sum_{X}^* \sum_{l=1}^R \left| \sum_{N\alpha \leq eX} D(\alpha) \chi(\alpha) (N\alpha)^{-\frac{1}{2}-it_{X,1}} c(\frac{N\alpha}{X}) \right|^2$$

$$|t_{X,1}| < t_0$$

$$\ll (q^2 \cdot t_0^n + X)(1+\delta^{-1} \log X)(\log X)^{3n+1} \sum_{N\alpha \leq eX} D^2(\alpha) (N\alpha)^{-1}$$

$$\ll (q^2 + X)(1+\delta^{-1} \log X)(\log X)^{3n+5}.$$

Die auftretenden $\ll$ -Konstanten hängen nur vom Körper K ab.

Bei der Abschätzung des zweiten Summanden verfähre man wie Huxley [3; 3.4, 3.5, 3.8].

Es gilt [3; 2.37] :

$$c'(v) = \sum_{m=-2n-1}^{2n} c_m'(v) \left(\frac{A}{XY}\right)^4 (m-\frac{1}{2})\pi i \cdot \frac{G^2(\frac{1}{2}-it_{X,1}-(m-\frac{1}{2})\pi i)}{G^2(\frac{1}{2}-it_{X,1})} + c''(v),$$

wobei die Koeffizienten $c_m'(v)$ und $c''(v)$ nur von m, n und v abhängen.

Ferner gilt: $A \ll (Nq)^{\frac{1}{2}}.$

Somit ergibt sich mit Hilfe der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung :

$$(5.4) \quad \left| \sum_{N\alpha \leq eY} D(\alpha) \bar{\chi}(\alpha) (N\alpha)^{-\frac{1}{2}+it_{X,1}} c'(\frac{N\alpha}{Y}) \right|^2 |G(\frac{1}{2}-it_{X,1})|^4$$

$$\ll \left| \sum_{N\alpha \leq eY} D(\alpha) \bar{\chi}(\alpha) (N\alpha)^{-\frac{1}{2}+it_{X,1}} \cdot \sum_{m=-2n-1}^{2n} c_m'(\frac{N\alpha}{Y}) \left(\frac{A}{XY}\right)^4 (m-\frac{1}{2})\pi i \right|$$

$$\cdot G^2(\frac{1}{2}-it_{X,1}-(m-\frac{1}{2})\pi i)|^2 + \left| \sum_{N\alpha \leq eY} \frac{D(\alpha) \bar{\chi}(\alpha)}{(N\alpha)^{\frac{1}{2}-it_{X,1}}} c''(\frac{N\alpha}{Y}) \right|^2 |G(\frac{1}{2}-it_{X,1})|^4$$

$$\begin{aligned}
 < < \sum_{m=-2n-1}^{2n} \left| \sum_{N\alpha \leq eY} D(\alpha) \bar{\chi}(\alpha) (N\alpha)^{-\frac{1}{2}+it_{X,1}} c_m''\left(\frac{N\alpha}{Y}\right) \right|^2 \cdot \\
 \cdot \sum_{m=-2n-1}^{2n} \left| G^4\left(\frac{1}{2}-it_{X,1}, -(m-\frac{1}{2})\pi i\right) \right| + \left| \sum_{N\alpha \leq eY} D(\alpha) \bar{\chi}(\alpha) (N\alpha)^{-\frac{1}{2}+it_{X,1}} \right. \\
 \cdot c_m''\left(\frac{N\alpha}{Y}\right) \left| G\left(\frac{1}{2}-it_{X,1}\right) \right|^4 \cdot
 \end{aligned}$$

Es gilt:

$$G(u) = \Gamma\left(\frac{u}{2}\right)^{r_1} \Gamma\left(\frac{1-u}{2}\right)^{-r_1} \Gamma(u)^{r_2} \Gamma(1-u)^{-r_2}, \quad r_1+2r_2=n.$$

Somit folgt:

$$\begin{aligned}
 G\left(\frac{1}{2}-it_{X,1}\right) &= \Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{i}{2}t_{X,1}\right)^{r_1} \Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{i}{2}t_{X,1}\right)^{-r_1} \Gamma\left(\frac{1}{2}-it_{X,1}\right)^{r_2} \\
 &\quad \Gamma\left(\frac{1}{2}+it_{X,1}\right)^{-r_2}.
 \end{aligned}$$

Man setze $u = \frac{1}{4}-\frac{i}{2}t_{X,1}$, $v = \frac{1}{2}-it_{X,1}$, dann gilt:

$$\left| G\left(\frac{1}{2}-it_{X,1}\right) \right| = \left| \frac{\Gamma(u)}{\Gamma(\bar{u})} \right|^{r_1} \left| \frac{\Gamma(v)}{\Gamma(\bar{v})} \right|^{r_2} < 1.$$

Ebenso folgt:

$$\left| G\left(\frac{1}{2}-it_{X,1}, -(m-\frac{1}{2})\pi i\right) \right| < 1 \quad \text{für } m=-2n-1, \dots, 2n.$$

Insgesamt erhält man also für (5.4):

$$\begin{aligned}
 &\left| \sum_{N\alpha \leq eY} D(\alpha) \bar{\chi}(\alpha) (N\alpha)^{-\frac{1}{2}+it_{X,1}} c_m''\left(\frac{N\alpha}{Y}\right) \right|^2 \left| G\left(\frac{1}{2}-it_{X,1}\right) \right|^4 \\
 &< < \sum_{m=-2n-1}^{2n} \left| \sum_{N\alpha \leq eY} D(\alpha) \bar{\chi}(\alpha) (N\alpha)^{-\frac{1}{2}+it_{X,1}} c_m''\left(\frac{N\alpha}{Y}\right) \right|^2 + \\
 &\quad + \left| \sum_{N\alpha \leq eY} D(\alpha) \bar{\chi}(\alpha) (N\alpha)^{-\frac{1}{2}+it_{X,1}} c_m''\left(\frac{N\alpha}{Y}\right) \right|^2.
 \end{aligned}$$

Man wende auf diesen Ausdruck Satz 3.1 mit $r=n$ an :

$$\sum_{q \leq Nq \leq 2q} \sum_{\chi}^* \sum_{l=1}^R \frac{\chi}{l} \left| \sum_{N\alpha \leq eY} D(\alpha) \bar{\chi}(\alpha) (N\alpha)^{-\frac{1}{2} + it_{\chi,1}} c' \left(\frac{N\alpha}{Y} \right) \right|^2 \cdot \left| G \left(\frac{1}{2} - it_{\chi,1} \right) \right|^4$$

$$<< (q^2 \cdot t_0^n + Y)(1 + \delta^{-1} \log Y)(\log Y)^{3n+1} \sum_{N\alpha \leq eY} D^2(\alpha) (N\alpha)^{-1}$$

$$<< (q^2 + Y)(1 + \delta^{-1} \log Y)(\log Y)^{3n+5}.$$

Es ergibt sich schließlich die folgende Abschätzung für (5.3) :

$$\begin{aligned} & \sum_{q \leq Nq \leq 2q} \sum_{\chi \bmod q}^* \sum_{l=1}^R \frac{\chi}{l} \left| \zeta_K \left(\frac{1}{2} + it_{\chi,1}, \chi \right) \right| \\ & << q^{-2} \cdot \int_{q^2}^{8q^2} (q^2 + X)(1 + \delta^{-1} \log X)(\log X)^{3n+5} dX + \\ & + \int_{e^{-1}}^{d^2 \left(\frac{t_0}{2\pi} \right)^{2n}} (q^2 + Y)(1 + \delta^{-1} \log Y)(\log Y)^{3n+5} dY + q^2 t_0 (1 + \delta^{-1}) \\ & << q^2 (1 + \delta^{-1} \log 2q)(\log 2q)^{3n+5} + q^2 (1 + \delta^{-1}) \\ & << q^2 (1 + \delta^{-1} \log 2q)(\log 2q)^{3n+5}. \end{aligned}$$

Die auftretenden $<<$ -Konstanten hängen nur vom Körper K ab.

Man summiere über Intervalle der Form

$$2^{-m-1}Q \leq Nq \leq 2^{-m}Q, \quad m \geq 0; \quad \text{dann folgt:}$$

$$\sum_{Nq \leq Q} \sum_X^* \sum_{l=1}^R |\zeta_K^4(\frac{1}{2} + it_{X,1}, \chi)| = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^{-m-1} Q \leq Nq \leq 2^{-m} Q} \sum_{\chi \bmod q}^* |\zeta_K^4(\frac{1}{2} + it_{X,1}, \chi)|$$

$$|t_{X,1}| < t_0$$

$$\sum_{l=1}^R |\zeta_K^4(\frac{1}{2} + it_{X,1}, \chi)|$$

$$<< \sum_{m=0}^{\infty} 2^{-2m} Q^2 (1 + \delta^{-1} \log Q) (\log Q)^{3n+5}$$

$$<< Q^2 (1 + \delta^{-1} \log Q) (\log Q)^{3n+5} .$$

2. Fall: Man betrachte jetzt die Tripel (q, χ, l) , für die $t_0 \leq |t_{X,1}| \leq T$ gilt, und fasse diejenigen mit der Eigenschaft

$$q \leq Nq \leq 2q \quad , \quad 2 \leq T_1 \leq |t_{X,1}| \leq 2T_1$$

zusammen. Man wähle

$$(Nq)^2 \cdot \left(\frac{|t_{X,1}|}{2\pi}\right)^n \leq X \leq 2(Nq)^2 \left(\frac{|t_{X,1}|}{2\pi}\right)^n ;$$

dann folgt wegen (5.2) :

$$\frac{1}{2} d^2 \left(\frac{T_1}{2\pi}\right)^n \leq \frac{1}{2} d^2 \left(\frac{|t_{X,1}|}{2\pi}\right)^n \leq Y \leq d^2 \left(\frac{|t_{X,1}|}{2\pi}\right)^n \leq d^2 \left(\frac{T_1}{\pi}\right)^n .$$

Aus (5.1) ergibt sich durch Integration nach X :

$$|\zeta_K^4(\frac{1}{2} + it_{X,1}, \chi)| << (Nq)^{-2} |t_{X,1}|^{-n} .$$

$$\frac{2(Nq)^2 \left(\frac{|t_{X,1}|}{2\pi}\right)^n}{(Nq)^2 \left(\frac{|t_{X,1}|}{2\pi}\right)^n} \int \left| \sum_{Nq \leq eX} D(\alpha) \chi(\alpha) (Nq)^{-\frac{1}{2} - it_{X,1}} c\left(\frac{Nq}{X}\right) \right|^2 dX$$

$$\begin{aligned}
 & + (Nq)^{-2} |t_{X,1}|^{-n} \int \frac{d^2(\frac{|t_{X,1}|}{2\pi})^n}{\frac{1}{2}d^2(\frac{|t_{X,1}|}{2\pi})^n} \left| \sum_{N\alpha \leq eY} D(\alpha) \bar{\chi}(\alpha) (N\alpha)^{-\frac{1}{2}+it_{X,1}} \right. \\
 & \quad \cdot c'(\frac{N\alpha}{Y})^2 |G(\frac{1}{2}-it_{X,1})|^4 \frac{(Nq)^2 |t_{X,1}|^{2n}}{Y^2} dY \\
 & + (Nq)^{-2} |t_{X,1}|^{-n} \int \frac{2(Nq)^2 (\frac{|t_{X,1}|}{2\pi})^n}{(Nq)^2 (\frac{|t_{X,1}|}{2\pi})^n} (Nq)^2 X^{-1} |t_{X,1}|^{-2n-2} \log^2 Y dX \\
 & < q^{-2} \cdot T_1^{-n} \cdot \int \frac{8q^2 (\frac{T_1}{\pi})^n}{q^2 (\frac{T_1}{2\pi})^n} \left| \sum_{N\alpha \leq eX} D(\alpha) \chi(\alpha) (N\alpha)^{-\frac{1}{2}-it_{X,1}} c(\frac{N\alpha}{X})^2 \right. \\
 & + T_1^{-n} \cdot \int \frac{d^2(\frac{T_1}{\pi})^n}{\frac{1}{2}d^2(\frac{T_1}{2\pi})^n} \left| \sum_{N\alpha \leq eY} D(\alpha) \bar{\chi}(\alpha) (N\alpha)^{-\frac{1}{2}+it_{X,1}} c'(\frac{N\alpha}{Y})^2 \right. \\
 & \quad \cdot |G(\frac{1}{2}-it_{X,1})|^4 dY \\
 & + T_1^{-3n-2} \cdot \log^2 T_1 .
 \end{aligned}$$

Somit erhält man

$$\begin{aligned}
 & \sum_{q \leq Nq \leq 2q} \sum_{X \bmod q}^* \sum_{l=1}^R |z_K(\frac{1}{2}+it_{X,1}, X)| < \\
 & T_1 \leq |t_{X,1}| \leq 2T_1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \ll q^{-2} T_1^{-n} \int_{q^2 (\frac{T_1}{2\pi})^n}^{8q^2 (\frac{T_1}{\pi})^n} \sum_{q \leq Nq \leq 2q} \sum_X^* \sum_{l=1}^R \left| \sum_{N\alpha \leq eX} D(\alpha) \chi(\alpha) \cdot \right. \\
 & \quad \left. \cdot (N\alpha)^{-\frac{1}{2}-it_{X,1}} c\left(\frac{N\alpha}{X}\right) \right|^2 dX \\
 & + T_1^{-n} \int_{\frac{1}{2}d^2 (\frac{T_1}{2\pi})^n}^{d^2 (\frac{T_1}{\pi})^n} \sum_{q \leq Nq \leq 2q} \sum_X^* \sum_{l=1}^R \left| \sum_{N\alpha \leq eY} D(\alpha) \bar{\chi}(\alpha) \cdot \right. \\
 & \quad \left. \cdot (N\alpha)^{-\frac{1}{2}+it_{X,1}} c\left(\frac{N\alpha}{Y}\right) \right|^2 |G(\frac{1}{2}-it_{X,1})|^4 dY \\
 & + \sum_{q \leq Nq \leq 2q} \sum_X^* \sum_{l=1}^R (\log T_1)^2 .
 \end{aligned}$$

Für den letzten Ausdruck gilt die folgende Abschätzung:

$$\sum_{q \leq Nq \leq 2q} \sum_X^* \sum_{l=1}^R (\log T_1)^2 \ll q^2 T_1 (1+\delta^{-1}) (\log T_1)^2 .$$

Die beiden anderen Summanden werden wieder mit Satz 3.1 abgeschätzt. Zunächst folgt:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{q \leq Nq \leq 2q} \sum_X^* \sum_{l=1}^R \left| \sum_{N\alpha \leq eX} D(\alpha) \chi(\alpha) (N\alpha)^{-\frac{1}{2}-it_{X,1}} c\left(\frac{N\alpha}{X}\right) \right|^2 \\
 & \quad T_1 \leq |t_{X,1}| \leq 2T_1
 \end{aligned}$$

$$\ll (q^2 T_1^n + X) (1+\delta^{-1} \log X) (\log X)^{3n+1} \sum_{N\alpha \leq eX} D^2(\alpha) (N\alpha)^{-1}$$

$$\ll (q^2 T_1^n + X) (1+\delta^{-1} \log X) (\log X)^{3n+5} .$$

Den zweiten Summanden schätze man wie im 1. Fall ab. Es ergibt sich

$$\sum_{q \leq Nq \leq 2q} \sum_{\chi}^* \sum_{l=1}^{R_X} \left| \sum_{N\alpha \leq eY} D(\alpha) \bar{\chi}(\alpha) (N\alpha)^{-\frac{1}{2} + it_{\chi,1}} c' \left(\frac{N\alpha}{Y} \right) \right|^2 \cdot |G(\frac{1}{2} - it_{\chi,1})|^4$$

$$T_1 \leq |t_{\chi,1}| \leq 2T_1$$

$$<< (q^{2T_1^n} + Y)(1 + \delta^{-1} \log X)(\log X)^{3n+5}$$

Insgesamt erhält man

$$\sum_{q \leq Nq \leq 2q} \sum_{\chi}^* \sum_{l=1}^{R_X} |\zeta_K(\frac{1}{2} + it_{\chi,1}, \chi)|$$

$$T_1 \leq |t_{\chi,1}| \leq 2T_1$$

$$<< q^{-2 \cdot T_1^n} \cdot \int_{q^2 (\frac{T_1}{2\pi})^n}^{8q^2 (\frac{T_1}{\pi})^n} (q^{2T_1^n} + X)(1 + \delta^{-1} \log X)(\log X)^{3n+5} dx$$

$$+ T_1^{-n} \cdot \int_{\frac{1}{2} d^2 (\frac{T_1}{2\pi})^n}^{d^2 (\frac{T_1}{\pi})^n} (q^{2T_1^n} + Y)(1 + \delta^{-1} \log Y)(\log Y)^{3n+5} dY$$

$$+ q^{2T_1} \cdot (1 + \delta^{-1}) \cdot (\log T_1)^2$$

$$<< q^{2 \cdot T_1^n} (1 + \delta^{-1} \log q T_1)(\log q T_1)^{3n+5}$$

$$+ q^{2 \cdot T_1^n} (1 + \delta^{-1} \log T_1 X \log T_1)^{3n+5} + q^{2T_1} \cdot (1 + \delta^{-1}) (\log T_1)^2$$

$$<< q^2 \cdot T_1^n (1+\delta^{-1} \log q T_1) (\log q T_1)^{3n+5}.$$

Die auftretenden $<<$ -Konstanten hängen nur vom Körper K ab.

Es folgt

$$\begin{aligned} & \sum_{q \leq Nq \leq 2q} \sum_{\chi}^* \sum_{l=1}^R |\zeta_K^4(\frac{1}{2} + it_{\chi,1}, \chi)| \\ & \quad t_0 \leq |t_{\chi,1}| \\ & = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{q \leq Nq \leq q} \sum_{\chi}^* \sum_{l=1}^R |\zeta_K^4(\frac{1}{2} + it_{\chi,1}, \chi)| \\ & \quad 2^{-m-1} T \leq |t_{\chi,1}| \leq 2^{-m} T \end{aligned}$$

$$<< \sum_{m=0}^{\infty} q^2 (2^{-m} T)^n (1+\delta^{-1} \log q T) (\log q T)^{3n+5}$$

$$<< q^2 T^n (1+\delta^{-1} \log q T) (\log q T)^{3n+5}$$

und schließlich

$$\begin{aligned} \sum_{Nq \leq Q} \sum_{\chi}^* \sum_{l=1}^R |\zeta_K^4(\frac{1}{2} + it_{\chi,1}, \chi)| &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{2^{-m-1} Q \leq Nq \leq 2^{-m} Q} \sum_{\chi}^* \\ & \quad \sum_{l=1}^R |\zeta_K^4(\frac{1}{2} + it_{\chi,1}, \chi)| \end{aligned}$$

$$<< \sum_{m=0}^{\infty} 2^{-2m} \cdot Q^2 T^n (1+\delta^{-1} \log Q T) (\log Q T)^{3n+5}$$

$$<< Q^2 T^n (1+\delta^{-1} \log Q T) (\log Q T)^{3n+5}.$$

6. Man bezeichne mit

$$N(\sigma, T, \chi)$$

die Anzahl der Nullstellen $\rho = \beta + i\gamma$ von $\zeta_K(s, \chi)$ im Rechteck

$$\sigma \leq \beta \leq 1, \quad |\gamma| \leq T.$$

Es sollen Ausdrücke der Form

$$(6.1) \quad \sum_{N\mathfrak{q} \leq Q} \sum_{\chi \bmod \mathfrak{q}}^* N(\sigma, T, \chi), \quad \sigma \geq \frac{1}{2}, \quad T \geq 2$$

abgeschätzt werden. Dabei wird über alle ganzen Ideale $\mathfrak{q}$ aus K mit $N\mathfrak{q} \leq Q$ und alle primitiven Charaktere der engeren Idealklassengruppe modulo $\mathfrak{q}$ summiert.

Zunächst muß man Betrachtungen durchführen, die es ermöglichen, die Mittelwertsätze für Dirichletsche Polynome aus Paragraph 3 auf dieses Problem anzuwenden.

Für den Körper der rationalen Zahlen findet man die entsprechenden Überlegungen bei Montgomery in [12] und [13].

Es seien X, Y reelle Parameter, deren Werte später angegeben werden, und es gelte

$$2 \leq X \leq Y \leq (QT)^A,$$

wobei $A \leq 6n$ eine positive Konstante ist.

Man setze

$$M(s, \chi) = \sum_{N\alpha \leq X} \mu(\alpha) \chi(\alpha) (N\alpha)^{-s}$$

$$\text{und} \quad f(s, \chi) = \zeta_K(s, \chi) M(s, \chi) ;$$

dann folgt:

$$\begin{aligned} f(s, \chi) &= \sum_{\alpha} \chi(\alpha) (N\alpha)^{-s} \sum_{N\psi \leq X} \mu(\psi) \chi(\psi) (N\psi)^{-s} , \quad \sigma > 1 \\ &= \sum_{\alpha} \sum_{N\psi \leq X} \chi(\alpha\psi) N(\alpha\psi)^{-s} \mu(\psi) \\ &= \sum_{\alpha} \chi(\alpha) (N\alpha)^{-s} \sum_{\substack{N\psi \leq X \\ \psi/\alpha}} \mu(\psi) \\ &= \sum_{\alpha} c(\alpha) \chi(\alpha) (N\alpha)^{-s} , \end{aligned}$$

$$\text{wobei} \quad c(\alpha) = \sum_{\substack{N\psi \leq X \\ \psi/\alpha}} \mu(\psi) \quad \text{ist.}$$

Bekanntlich gilt $c((1)) = 1$ und $c(\alpha) = 0$ für $2 \leq N\alpha \leq X$ wegen

$$\sum_{\psi/\alpha} \mu(\psi) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \alpha = (1) \\ 0, & \text{falls } \alpha \neq (1) \end{cases}$$

und somit

$$f(s, \chi) = 1 + \sum_{N\alpha > X} c(\alpha) \chi(\alpha) (N\alpha)^{-s} ,$$

wobei die Koeffizienten $c(\alpha)$ reell sind und

$$|c(\alpha)| \leq \sum_{\substack{\psi \\ \psi/\alpha}} 1 =: D(\alpha) .$$

Es sei $\frac{1}{2} < \sigma \leq 1$ und $\rho = \beta + i\gamma$, $\sigma \leq \beta < 1$, eine Nullstelle von $\zeta_K(s, \chi)$; dann ergibt sich

$$\begin{aligned}
 & e^{-\frac{1}{Y}} + \sum_{N\alpha > X} c(\alpha) \chi(\alpha) (N\alpha)^{-\rho} e^{-\frac{N\alpha}{Y}} \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} f(\rho+w, \chi) Y^w \Gamma(w) dw \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \zeta_K(\rho+w, \chi) M(\rho+w, \chi) Y^w \Gamma(w) dw .
 \end{aligned}$$

Man wende den Residuensatz auf das Rechteck mit den Ecken $2 \pm iT$ und $\frac{1}{2} - \beta \pm iT$ an.

Es folgt:

$$\begin{aligned}
 (6.2) \quad & e^{-\frac{1}{Y}} + \sum_{N\alpha > X} c(\alpha) \chi(\alpha) (N\alpha)^{-\rho} e^{-\frac{N\alpha}{Y}} \\
 &= \varepsilon(\chi) \frac{\Phi(\mathfrak{q})}{N(\mathfrak{q})} a_K M(1, \chi) Y^{1-\rho} \Gamma(1-\rho) + \\
 &+ \frac{1}{2 \cdot \pi} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{1}{2} + i\gamma + iu, \chi\right) Y^{\frac{1}{2} - \beta + iu} \Gamma\left(\frac{1}{2} - \beta + iu\right) du ,
 \end{aligned}$$

wobei

$$\varepsilon(\chi) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \chi = \chi_0 \text{ Hauptcharakter mod } \mathfrak{q} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und a_K das Residuum der Dedekindschen Zetafunktion $\zeta_K(s)$ ist.

Zunächst soll der " $\varepsilon(\chi)$ "-Term abgeschätzt werden.

Falls $|\gamma| \geq (\log QT)^2$ und $\varepsilon(\chi) = 1$, dann gilt

$$\varepsilon(\chi) \frac{\Phi(\mathfrak{q})}{N(\mathfrak{q})} a_K M(1, \chi) Y^{1-\rho} \Gamma(1-\rho) = o(1) \quad \text{für } Y \rightarrow \infty$$

wegen

$$|\varepsilon(\chi) \frac{\Phi(\mathfrak{q})}{N(\mathfrak{q})} a_K M(1, \chi) Y^{1-\rho} \Gamma(1-\rho)| \ll \sum_{N\alpha \leq X} (N\alpha)^{-1} Y^{1-\beta} |\Gamma(1-\rho)|$$

$$\begin{aligned}
 &<< Y^{\frac{1}{2}} \log X e^{-\frac{\pi}{2}|\gamma|} \quad \text{nach (3.4)} \\
 &<< (QT)^{\frac{A}{2}} \log QT e^{-(\frac{A}{2}+1)|\gamma|^{\frac{1}{2}}} \\
 &<< (QT)^{\frac{A}{2}} \log QT e^{-(\frac{A}{2}+1)\log QT} << Y^{-\frac{1}{2A}}.
 \end{aligned}$$

Die Abschätzung

$$N(\frac{1}{2}, T, \chi_0) << T \cdot \log T$$

von Landau [7; Satz 171] zeigt, daß die Zetafunktion $\zeta_K(s) << (\log QT)^3$ Nullstellen $\rho = \beta + i\gamma$ mit $|\gamma| \leq (\log QT)^2$ besitzt.

Der " $\varepsilon(\chi)$ " - Term in (6.2) ist also $o(1)$ mit Ausnahme von $<< (\log QT)^3$ Nullstellen.

Es gilt in (6.2)

$$(6.4) \quad e^{-\frac{1}{Y}} = 1 + o(1) \quad \text{für } Y \rightarrow \infty$$

und ferner

$$(6.5) \quad \sum_{N\alpha > X} c(\alpha) \chi(\alpha) (N\alpha)^{-\rho} e^{-\frac{N\alpha}{Y}} = \sum_{X < N\alpha \leq Y^2} c(\alpha) \chi(\alpha) (N\alpha)^{-\rho} \cdot e^{-\frac{N\alpha}{Y}} + o(1),$$

denn

$$\begin{aligned}
 \sum_{N\alpha > Y^2} c(\alpha) \chi(\alpha) (N\alpha)^{-\rho} e^{-\frac{N\alpha}{Y}} &<< \sum_{N\alpha > Y^2} D(\alpha) (N\alpha)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{N\alpha}{Y}} \\
 &<< \sum_{N\alpha > Y^2} (N\alpha)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{N\alpha}{Y}} \\
 &<< e^{-\frac{1}{2}Y} \cdot \sum_{\alpha} (N\alpha)^{-2} << e^{-\frac{1}{2}Y}.
 \end{aligned}$$

Schließlich kann man das Integral in (6.2) auf

$$(6.6) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{1}{2}(\log QT)^2}^{\frac{1}{2}(\log QT)^2} \zeta_K\left(\frac{1}{2}+i\gamma+iu, \chi\right) M\left(\frac{1}{2}+i\gamma+iu, \chi\right) Y^{\frac{1}{2}-\beta+iu} \cdot \\ \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}-\beta+iu\right) du$$

beschränken mit einem Fehlerglied von $o(1)$.

Es ergibt sich nämlich mit Lemma 3.7 :

$$\begin{aligned} & \int_{\frac{1}{2}(\log QT)^2}^{\infty} \zeta_K\left(\frac{1}{2}+i\gamma+iu, \chi\right) M\left(\frac{1}{2}+i\gamma+iu, \chi\right) Y^{\frac{1}{2}-\beta+iu} \Gamma\left(\frac{1}{2}-\beta+iu\right) du \\ & \ll Y^{\frac{1}{2}-\beta} \sum_{N\alpha \leq X} (N\alpha)^{-\frac{1}{2}} \int_{\frac{1}{2}(\log QT)^2}^{\infty} |\zeta_K\left(\frac{1}{2}+i\gamma+iu, \chi\right)| e^{-u} du \\ & \ll X \cdot \int_{\frac{1}{2}(\log QT)^2}^{\infty} |\zeta_K\left(\frac{1}{2}+i\gamma+iu, \chi\right)| e^{-u} du \\ & \ll X \cdot Q(|\gamma|+1)^n \int_{\frac{1}{2}(\log QT)^2}^{\infty} u^n e^{-u} du \\ & \ll (QT)^{A+n} \int_{\frac{1}{2}(\log QT)^2}^{\infty} u^n e^{-u} du \\ & \ll (QT)^{-1} \int_0^{\infty} u^n e^{-\frac{1}{2}u} du \ll Y^{-\frac{1}{A}}. \end{aligned}$$

Man erhält also aus (6.2) mit (6.3), (6.4), (6.5) und (6.6) :

$$\begin{aligned}
 1 + \sum_{X < N\alpha \leq Y^2} c(\alpha) \chi(\alpha) (N\alpha)^{-\rho} e^{-\frac{N\alpha}{Y}} \\
 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{1}{2}(\log QT)^2}^{\frac{1}{2}(\log QT)^2} f\left(\frac{1}{2} + i\gamma + iu, \chi\right) Y^{\frac{1}{2} - \beta + iu} \Gamma\left(\frac{1}{2} - \beta + iu\right) du + o(1).
 \end{aligned}$$

Daraus folgt für $Y \geq Y_0$ entweder

$$(6.7) \quad \left| \sum_{X < N\alpha \leq Y^2} c(\alpha) \chi(\alpha) (N\alpha)^{-\rho} e^{-\frac{N\alpha}{Y}} \right| \geq \frac{1}{3}$$

oder

$$(6.8) \quad \left| \int_{-\frac{1}{2}(\log QT)^2}^{\frac{1}{2}(\log QT)^2} f\left(\frac{1}{2} + i\gamma + iu, \chi\right) Y^{\frac{1}{2} - \beta + iu} \Gamma\left(\frac{1}{2} - \beta + iu\right) du \right| \geq \frac{1}{3}$$

oder beide $\geq \frac{1}{3}$.

Man definiere die folgende Teilmenge der betrachteten Nullstellen :

$$\begin{aligned}
 (6.9) \quad \mathcal{R} := \{ \rho = \beta + i\gamma, \beta \geq \sigma, |\gamma| \leq T; |\gamma_1 - \gamma_2| \geq 2(\log QT)^2, \\
 \text{falls } \rho_1 = \beta_1 + i\gamma_1, \rho_2 = \beta_2 + i\gamma_2 \text{ Nullstellen} \\
 \text{derselben } \zeta_K\text{-Funktion sind} \} .
 \end{aligned}$$

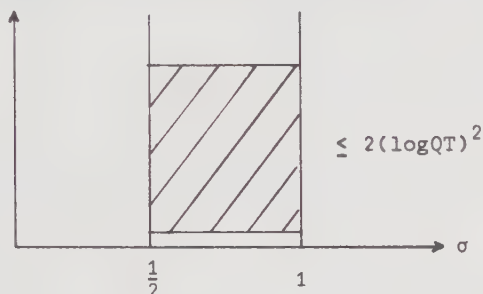
$R = |\mathcal{R}|$ bezeichne die Anzahl der Elemente von $\mathcal{R}$.

Nach [1; Lemma 5] oder [4; Lemma 1] gilt für jeden primitiven Charakter χ der engeren Idealklassengruppe modulo $\mathfrak{q}$, $N\mathfrak{q} \leq Q$:

$$N(\frac{1}{2}, t+1, \chi) - N(\frac{1}{2}, t, \chi) \ll \log\{Q(|t|+1)\},$$

wobei die auftretende $\ll$ -Konstante nur vom Körper K abhängt.

Es liegen also im schraffierten Bereich



$\ll (\log QT)^3$ Nullstellen von $\zeta_K(s, \chi)$.

Berücksichtigt man außerdem (6.3) und (6.9), dann ergibt sich :

$$\sum_{Nq \leq Q} \sum_{\chi \bmod q}^* N(\sigma, T, \chi) \ll (R+1)(\log QT)^3.$$

Schließlich bezeichne man mit $\mathcal{R}_1$ und $\mathcal{R}_2$ die Menge der Nullstellen in $\mathcal{R}$, für die (6.7) bzw. (6.8) gilt, und es sei $R_1 = |\mathcal{R}_1|$ bzw. $R_2 = |\mathcal{R}_2|$.

Wegen $R \leq R_1 + R_2$ folgt

$$(6.10) \quad \sum_{Nq \leq Q} \sum_{\chi \bmod q}^* N(\sigma, T, \chi) \ll (R_1 + R_2 + 1)(\log QT)^3.$$

Satz 6.1 : Es seien $Q \geq 1$, $T \geq 2$ reelle Zahlen.

Dann gilt

a) im Bereich $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1 - \frac{1}{2n}$, $n \geq 2$

$$\sum_{Nq \leq Q} \sum_{\chi \bmod q}^* N(\sigma, T, \chi) < \{Q^2 T^{\frac{2}{3}n(2-\sigma)} (\log QT)^{3n}\}^{\frac{3(1-\sigma)}{2-\sigma}} (\log QT)^{10}$$

b) im Bereich $1 - \frac{1}{2n} \leq \sigma \leq 1$, $n \geq 1$

$$\sum_{Nq \leq Q} \sum_{\chi \bmod q}^* N(\sigma, T, \chi) < T^{\frac{n+2}{3} + \frac{2}{3}a - \frac{2a}{3n} - b} \{Q^2 T^b (\log QT)^{3n}\}^{\frac{3(1-\sigma)}{2-\sigma}} (\log QT)^{10}.$$

Die reellen Zahlen a und b unterliegen den Bedingungen

$$1 \leq a \leq b \leq n$$

und

$$1 - \frac{a}{n} + 2a - 2a\sigma - \frac{3b(1-\sigma)}{2-\sigma} = \frac{n+2}{3} + \frac{2}{3}a - \frac{2a}{3n} + \frac{2}{3} - b \geq 0.$$

Es ergeben sich z.B. die folgenden Abschätzungen im Bereich $1 - \frac{1}{2n} \leq \sigma \leq 1$:

$$\sum_{Nq \leq Q} \sum_{\chi \bmod q}^* N(\sigma, T, \chi) < \{Q^2 T^{b'} (\log QT)^{3n}\}^{\frac{3(1-\sigma)}{2-\sigma}} (\log QT)^{10}$$

$$\text{mit } b' = \frac{n+2}{3} + \frac{2}{3}(1 - \frac{1}{n}) - \frac{(n+1)\sigma - n}{4\sigma + \frac{\sigma}{n} - 2 - 2\sigma^2}, \quad n \geq 1$$

$$\sum_{Nq \leq Q} \sum_{\chi \bmod q}^* N(\sigma, T, \chi) < T^{\frac{n+4}{3} - \frac{2}{3n} - b} \{Q^2 T^{b''} (\log QT)^{3n}\}^{\frac{3(1-\sigma)}{2-\sigma}} (\log QT)^{10}$$

$$\text{mit } b'' = \frac{(2-\sigma)(n-5+6\sigma+n^{-1})}{6\sigma-3} \leq \frac{n}{3} + \frac{5}{6} + \frac{1}{3n}, \quad n \geq 2$$

$$\text{und } \frac{n+4}{3} - \frac{2}{3n} - b'' \leq 1 - \frac{1}{n}, \quad n \geq 2.$$

Alle auftretenden $\ll$ -Konstanten hängen nur vom Körper K ab.

Beweis: Nach (6.10) gilt:

$$\sum_{Nq \leq Q} \sum_{\chi \bmod q}^* N(\sigma, T, \chi) \ll (R_1 + R_2 + 1)(\log QT)^3.$$

Es soll zunächst eine Abschätzung für R_1 angegeben werden.

Dazu zerlege man die Summe

$$\sum_{X < Na \leq Y^2} c(a) \chi(a) (Na)^{-\rho} e^{-\frac{Na}{Y}}$$

in r Teilsummen über Intervalle der Form $(2^k, 2^{k+1}]$.

Es folgt $2^r \leq Y^2$ und somit $r < 3 \log Y$.

Zu jedem $\rho \in \mathcal{R}_q$ gibt es ein Intervall $(2^k, 2^{k+1}]$ mit

$$\left| \sum_{2^k < Na \leq 2^{k+1}} c(a) \chi(a) (Na)^{-\rho} e^{-\frac{Na}{Y}} \right| \geq \frac{1}{9 \log Y}.$$

Andernfalls ergäbe sich mit (6.7) der Widerspruch

$$\frac{1}{3} \leq \left| \sum_{X < Na \leq Y^2} c(a) \chi(a) (Na)^{-\rho} e^{-\frac{Na}{Y}} \right| < 3 \log Y \frac{1}{9 \log Y} = \frac{1}{3}.$$

Da die Anzahl der Intervalle der Form $(2^k, 2^{k+1}]$ kleiner als $3 \log Y$ ist und R_1 Nullstellen $\rho \in \mathcal{R}_1$ existieren, gibt es eine Zahl U , $X \leq U \leq Y^2$, so daß gilt:

$$(6.11) \quad \left| \sum_{U < N\alpha \leq 2U} c(\alpha) \chi(\alpha) (N\alpha)^{-\rho} e^{-\frac{N\alpha}{Y}} \right| \geq \frac{1}{9 \log Y}$$

für $\gg R_1(\log Y)^{-1}$ Nullstellen $\rho \in \mathcal{R}_1$.

Somit folgt:

$$(6.12) \quad R_1(\log Y)^{-3} < \sum_{\rho_1 \in \mathcal{R}_1} \left| \sum_{U < N\alpha \leq 2U} c(\alpha) \chi_1(\alpha) (N\alpha)^{-\rho_1} e^{-\frac{N\alpha}{Y}} \right|^2$$

$$< \sum_{l=1}^{R_1} \left| \sum_{U < N\alpha \leq 2U} c(\alpha) \chi_1(\alpha) (N\alpha)^{-\rho_l} e^{-\frac{N\alpha}{Y}} \right|^2.$$

Man wende auf diesen Ausdruck Satz 3.1 mit $r=1$ an und beachte (6.9). Es ergibt sich

$$R_1(\log Y)^{-3} < \{Q^2 T(\log U)^{3n} + Q^{\frac{2}{n} T U} 1 - \frac{1}{n} (\log U)^3 + U\} \cdot \log U \cdot$$

$$\cdot \sum_{U < N\alpha \leq 2U} |D(\alpha)|^2 (N\alpha)^{-2\sigma} e^{-\frac{2N\alpha}{Y}}$$

$$< \{Q^2 T(\log U)^{3n} + Q^{\frac{2}{n} T U} 1 - \frac{1}{n} (\log U)^3 + U\} \log U U^{-2\sigma} e^{-\frac{2U}{Y}} \cdot$$

$$\sum_{U < N\alpha \leq 2U} (D(\alpha))^2$$

$$< \{Q^2 T U^{1-2\sigma} (\log U)^{3n} + Q^{\frac{2}{n} T U} 2 - \frac{1}{n} - 2\sigma (\log U)^3 + U^{2-2\sigma}\} e^{-\frac{2U}{Y}} (\log U)^4$$

Man erhält also für $X \leq U \leq Y^2$:

$$(6.13) \quad R_1 \ll \{Q^2 T U^{1-2\sigma} (\log U)^{3n} + Q^{\frac{2}{n}} T U^{2-\frac{1}{n}-2\sigma} (\log U)^3 + U^{2-2\sigma}\} e^{-\frac{2U}{Y}} (\log QT)^7.$$

Es soll jetzt R_2 abgeschätzt werden.

Für jede Nullstelle $\rho = \beta + i\gamma \in \mathfrak{N}_2$ sei t_ρ eine reelle Zahl mit der Eigenschaft

$$(6.14) \quad |\gamma - t_\rho| \leq \frac{1}{2} (\log QT)^2,$$

für die

$$|\zeta_K(\frac{1}{2} + it_\rho, \chi) M(\frac{1}{2} + it_\rho, \chi)|$$

maximal wird.

Man kann o.B.d.A. $\beta \geq \sigma \geq \frac{1}{2} + (\log QT)^{-1}$ annehmen, denn andernfalls folgt mit $N(\frac{1}{2}, T, \chi) \ll T \cdot \log QT$

$$\sum_{Nq \leq Q} \sum_{\chi \bmod q}^* N(\sigma, T, \chi) \ll Q^2 T \log QT \\ \ll (Q^2 T)^{\frac{3(1-\sigma)}{2-\sigma}} \cdot \log QT$$

$$\text{wegen } \frac{3(1-\sigma)}{2-\sigma} \geq \frac{3(1-\frac{1}{2} - (\log QT)^{-1})}{2-\frac{1}{2}} = 1 - 2(\log QT)^{-1}$$

$$\text{und } (Q^2 T)^{1-2(\log QT)^{-1}} = Q^2 T e^{-2(\log QT)^{-1} \log Q^2 T} \gg Q^2 T.$$

Es zeigt sich später, daß diese Abschätzung besser ist als die in Satz 6.1 angegebene.

$$\text{Es gilt: } \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\frac{1}{2}-\beta+iu)| du = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Gamma(\frac{3}{2}-\beta+iu)|}{|\frac{1}{2}-\beta+iu|} du$$

$$<< \frac{1}{|\frac{1}{2}-\beta|} \left\{ \int_0^1 |\Gamma(\frac{3}{2}-\beta+iu)| du + \int_1^{\infty} e^{-\frac{\pi}{2}u} u^{1-\beta} du \right\}$$

$$<< \log QT \cdot \int_1^{\infty} e^{-\frac{\pi}{2}u} u^{1-\beta} du$$

$$<< \log QT .$$

Mit (6.8) ergibt sich somit

$$\begin{aligned} (6.15) \quad |\zeta_K(\frac{1}{2}+it_{\rho}, \chi) M(\frac{1}{2}+it_{\rho}, \chi)| &>> Y^{\beta-\frac{1}{2}} (\log QT)^{-1} \\ &>> Y^{\sigma-\frac{1}{2}} (\log QT)^{-1} \end{aligned}$$

und folglich unter Verwendung der Hölderschen Ungleichung

$$\begin{aligned} (6.16) \quad R_2 Y^{\frac{4}{3}\sigma-\frac{2}{3}} (\log QT)^{-\frac{4}{3}} &<< \sum_{\rho_1 \in \mathcal{R}_2} |\zeta_K(\frac{1}{2}+it_{\rho_1}, \chi_1) M(\frac{1}{2}+it_{\rho_1}, \chi_1)|^{\frac{4}{3}} \\ &\leq \left\{ \sum_{\rho_1 \in \mathcal{R}_2} |\zeta_K(\frac{1}{2}+it_{\rho_1}, \chi_1)|^4 \right\}^{\frac{1}{3}} \left\{ \sum_{\rho_1 \in \mathcal{R}_2} |M(\frac{1}{2}+it_{\rho_1}, \chi_1)|^2 \right\}^{\frac{2}{3}} . \end{aligned}$$

Es seien ρ_j, ρ_k für $1 \leq j < k \leq R_2$ Nullstellen derselben ζ_K -Funktion.

Dann erhält man mit (6.9) und (6.14) :

$$\begin{aligned}
 |t_{\rho_j} - t_{\rho_k}| &= |t_{\rho_j} - \rho_j + \rho_k - t_{\rho_k} + \rho_j - \rho_k| \\
 &\geq |\rho_j - \rho_k| - |t_{\rho_j} - \rho_j| - |t_{\rho_k} - \rho_k| \\
 &\geq 2(\log QT)^2 - \frac{1}{2}(\log QT)^2 - \frac{1}{2}(\log QT)^2 \\
 &= (\log QT)^2 .
 \end{aligned}$$

Man wendet auf den ersten Faktor in (6.16) Satz 5.1 und auf den zweiten Faktor Satz 3.1 mit $r=1$ an. Es folgt

$$(6.17) \quad \left\{ \sum_{\rho_1 \in \mathcal{R}_2} |\zeta_K(\frac{1}{2} + it_{\rho_1}, X_1)| \right\}^{\frac{1}{3}} \ll (Q^2 T^n)^{\frac{1}{3}} (\log QT)^{n + \frac{5}{3}}$$

und

$$\begin{aligned}
 (6.18) \quad \left\{ \sum_{\rho_1 \in \mathcal{R}_2} |M(\frac{1}{2} + it_{\rho_1}, X_1)|^2 \right\}^{\frac{2}{3}} &\ll \{Q^2 T (\log X)^{3n} + \\
 &+ Q^{\frac{2}{n}} \cdot T \cdot X^{1 - \frac{1}{n}} (\log X)^3 + X\}^{\frac{2}{3}} (\log X)^{\frac{4}{3}} .
 \end{aligned}$$

Man wähle

$$(6.19) \quad X = Q^2 T^a (\log QT)^{3n}, \quad Y = \{Q^2 T^b (\log QT)^{3n}\}^{\frac{3}{2(2-\sigma)}},$$

wobei $1 \leq a \leq b \leq n$ reelle Zahlen sind, die später angegeben werden.

1. Fall: $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1 - \frac{1}{2n}, \quad n \geq 2.$

Aus (6.13) folgt:

$$R_1 << \{Q^2_{TU} 1^{-2\sigma} (\log U)^{3n} + Q^{\frac{2}{n}} T U^{2-\frac{1}{n}-2\sigma} (\log U)^3 + U^{2-2\sigma}\} \cdot e^{-\frac{2U}{Y}} (\log QT)^7$$

$$<< \{Q^2_{TX} 1^{-2\sigma} (\log QT)^{3n} + Q^{\frac{2}{n}} T Y^{2-\frac{1}{n}-2\sigma} (\log QT)^3 + Y^{2-2\sigma}\} \cdot (\log QT)^7$$

für $X \leq U \leq Y$, aber auch für $Y \leq U \leq Y^2$ wegen

$$e^{\frac{2U}{Y}} \geq \frac{2U}{Y} \geq \left(\frac{2U}{Y}\right)^{2-2\sigma} \geq \left(\frac{2U}{Y}\right)^{2-\frac{1}{n}-2\sigma}.$$

Es ergibt sich also mit (6.19):

$$\begin{aligned} R_1 &<< \{Q^2_T \{Q^2_{T^a} (\log QT)^{3n}\}^{1-2\sigma} (\log QT)^{3n} + Q^{\frac{2}{n}} T (\log QT)^3 \cdot \\ &\quad \cdot \{Q^2_{T^b} (\log QT)^{3n}\}^{\frac{(2-\frac{1}{n}-2\sigma)3}{2(2-\sigma)}} + \{Q^2_{T^b} (\log QT)^{3n}\}^{\frac{3(1-\sigma)}{2-\sigma}}\} (\log QT)^7 \\ &<< \{ \{Q^2_{T^a} (\log QT)^{3n}\}^{2-2\sigma} + Q^{\frac{2}{n}} T (\log QT)^3 \{Q^2_{T^b} (\log QT)^{3n}\}^{-\frac{3}{2n(2-\sigma)}} \cdot \\ &\quad \cdot \{Q^2_{T^b} (\log QT)^{3n}\}^{\frac{3(1-\sigma)}{2-\sigma}} + \{Q^2_{T^b} (\log QT)^{3n}\}^{\frac{3(1-\sigma)}{2-\sigma}} \} (\log QT)^7 \\ &<< \{ \{Q^2_{T^a} (\log QT)^{3n}\}^{\frac{3(1-\sigma)}{2-\sigma}} + Q^{\frac{2}{n}-\frac{3}{n(2-\sigma)}} T^{1-\frac{3b}{2n(2-\sigma)}} (\log QT)^{3-\frac{9}{2(2-\sigma)}} \cdot \\ &\quad \cdot \{Q^2_{T^b} (\log QT)^{3n}\}^{\frac{3(1-\sigma)}{2-\sigma}} + \{Q^2_{T^b} (\log QT)^{3n}\}^{\frac{3(1-\sigma)}{2-\sigma}} \} (\log QT)^7 \\ &<< \{ \{Q^2_{T^b} (\log QT)^{3n}\}^{\frac{3(1-\sigma)}{2-\sigma}} + T^{1-\frac{3b}{2n(2-\sigma)}} \{Q^2_{T^b} (\log QT)^{3n}\}^{\frac{3(1-\sigma)}{2-\sigma}} \} \cdot \\ &\quad \cdot (\log QT)^7. \end{aligned}$$

Man wähle $b = \frac{2}{3}n(2-\sigma) \leq n$; dann folgt:

$$(6.20) \quad R_1 << \{Q^2 T^b (\log QT)^{3n}\}^{\frac{3(1-\sigma)}{2-\sigma}} (\log QT)^7.$$

Die Abschätzung für R_2 erhält man aus (6.16), (6.17), (6.18) und (6.19) .

$$\begin{aligned} R_2 &<< Y^{\frac{2}{3}-\frac{4}{3}\sigma} (\log QT)^{\frac{4}{3}} (Q^2 T^n)^{\frac{1}{3}} (\log QT)^{n+\frac{5}{3}+\frac{4}{3}} \{Q^2 T (\log QT)^{3n} + \\ &\quad + Q^{\frac{2}{n}} T X^{1-\frac{1}{n}} (\log QT)^3 + X\}^{\frac{2}{3}} \\ &<< \{Q^2 T^b (\log QT)^{3n}\}^{\frac{1-2\sigma}{2-\sigma}} (Q^2 T^n)^{\frac{1}{3}} (\log QT)^{n+\frac{13}{3}} \{Q^2 T (\log QT)^{3n} + \\ &\quad + Q^{\frac{2}{n}} T \{Q^2 T^a (\log QT)^{3n}\}^{1-\frac{1}{n}} (\log QT)^3 + Q^2 T^a (\log QT)^{3n}\}^{\frac{2}{3}} \\ &<< \{Q^2 T^b (\log QT)^{3n}\}^{\frac{1-2\sigma}{2-\sigma}} Q^{\frac{2}{3}} T^{\frac{n}{3}} (\log QT)^{n+\frac{13}{3}} \{Q^2 T^{1+a-\frac{a}{n}} \cdot \\ &\quad \cdot (\log QT)^{3n} + Q^2 T^a (\log QT)^{3n}\}^{\frac{2}{3}} \\ &<< \{Q^2 T^b (\log QT)^{3n}\}^{\frac{1-2\sigma}{2-\sigma}} Q^{\frac{2}{3}} T^{\frac{n}{3}} (\log QT)^{n+\frac{13}{3}} Q^{\frac{4}{3}} T^{\frac{2}{3}+\frac{2}{3}a-\frac{2a}{3n}} \cdot \\ &\quad \cdot (\log QT)^{2n} \\ &<< \{Q^2 T^b (\log QT)^{3n}\}^{\frac{1-2\sigma}{2-\sigma}+1} \{Q^2 T^b (\log QT)^{3n}\}^{-1} Q^2 T^{\frac{n}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}a-\frac{2a}{3n}} \cdot \\ &\quad \cdot (\log QT)^{3n+\frac{13}{3}} \\ (6.21) \quad &<< \{Q^2 T^b (\log QT)^{3n}\}^{\frac{3(1-\sigma)}{2-\sigma}} T^{\frac{n}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}a-\frac{2a}{3n}-b} (\log QT)^{\frac{13}{3}} \end{aligned}$$

$$<< \{Q^2 T^{\frac{2}{3}n(2-\sigma)} (\log QT)^{3n}\}^{\frac{3(1-\sigma)}{2-\sigma}} T^{-n+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}a-\frac{2a}{3n}+\frac{2}{3}n\sigma} (\log QT)^{\frac{13}{3}}.$$

Man wähle $a = \frac{3n-2-2n\sigma}{2-\frac{2}{n}}$ für $n \geq 2$; dann folgt:

$$(6.22) \quad R_2 << \{Q^2 T^{\frac{2}{3}n(2-\sigma)} (\log QT)^{3n}\}^{\frac{3(1-\sigma)}{2-\sigma}} (\log QT)^{\frac{13}{3}}.$$

Es bleibt noch zu zeigen: $1 \leq a \leq b = \frac{2}{3}n(2-\sigma)$.

Es gilt:

$$\begin{aligned} \text{i) } 3n-2-2n\sigma &\geq 2-\frac{2}{n} \quad \leftrightarrow \quad 2n\sigma \leq 3n-4+\frac{2}{n} \\ &\leftrightarrow \quad \sigma \leq \frac{3}{2}-\frac{2}{n}+n^{-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma &\leq 1-\frac{1}{2n} \leq \frac{3}{2}-\frac{2}{n}+n^{-2} \quad \leftrightarrow \quad \frac{3}{2n} \leq \frac{1}{2}+n^{-2} \\ &\leftrightarrow \quad 3 \leq n+\frac{2}{n} \end{aligned}$$

$$\text{ii) } a \leq \frac{2}{3}n(2-\sigma) \quad \leftrightarrow \quad 3n-2-2n\sigma \leq \frac{2}{3}n(2-\sigma)(2-\frac{2}{n})$$

$$\leftrightarrow 9n-6-6n\sigma \leq 8n-4n\sigma-8+4\sigma$$

$$\leftrightarrow \sigma(2n+4) \geq n+2$$

$$\leftrightarrow \sigma \geq \frac{1}{2}.$$

Insgesamt ergibt sich schließlich für $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1-\frac{1}{2n}$:

$$\sum_{N_q \leq Q} \sum_{\chi \bmod q}^* N(\sigma, T, \chi) << (R_1+R_2+1)(\log QT)^3$$

$$<< \{Q^2 T^{\frac{2}{3}n(2-\sigma)} (\log QT)^{3n}\}^{\frac{3(1-\sigma)}{2-\sigma}} (\log QT)^{10}.$$

2. Fall: $1 - \frac{1}{2n} \leq \sigma \leq 1, \quad n \geq 1.$

Zunächst folgt aus (6.21):

$$(6.23) \quad R_2 << \{Q^2 T^b (\log QT)^{3n}\}^{\frac{3(1-\sigma)}{2-\sigma}} T^{\frac{n}{3} + \frac{2}{3}a - \frac{2a}{3n} - b} (\log QT)^{\frac{13}{3}}.$$

Die Abschätzung für R_1 erhält man aus (6.13) mit (6.19):

$$\begin{aligned} R_1 &<< \{Q^2 T (\log QT)^{3n} X^{1-2\sigma} + Q^{\frac{2}{n}} T X^{2-\frac{1}{n}-2\sigma} (\log QT)^3 + Y^{2-2\sigma}\} \cdot (\log QT)^7 \\ &<< \{Q^2 T (\log QT)^{3n} \{Q^2 T^a (\log QT)^{3n}\}^{1-2\sigma} + Q^{\frac{2}{n}} T (\log QT)^3 \cdot \\ &\quad \cdot \{Q^2 T^a (\log QT)^{3n}\}^{2-\frac{1}{n}-2\sigma} + \{Q^2 T^b (\log QT)^{3n}\}^{\frac{3(1-\sigma)}{2-\sigma}}\} (\log QT)^7 \\ &<< \{Q^{\frac{2}{n}} T (\log QT)^3 Q^{4-4\sigma} Q^{-\frac{2}{n}} T^{-\frac{a}{n}} (T^a)^{2-2\sigma} ((\log QT)^{3n})^{2-\frac{1}{n}-2\sigma} \\ &\quad + \{Q^2 T^b (\log QT)^{3n}\}^{\frac{3(1-\sigma)}{2-\sigma}}\} (\log QT)^7 \\ &<< \{T^{1-\frac{a}{n}} \{Q^2 T^a (\log QT)^{3n}\}^{2-2\sigma} + \{Q^2 T^b (\log QT)^{3n}\}^{\frac{3(1-\sigma)}{2-\sigma}}\} (\log QT)^7 \\ (6.24) \quad &<< T^{1-\frac{a}{n}+2a-2a\sigma-\frac{3b(1-\sigma)}{2-\sigma}} \{Q^2 T^b (\log QT)^{3n}\}^{\frac{3(1-\sigma)}{2-\sigma}} \cdot (\log QT)^7, \end{aligned}$$

falls $1 - \frac{a}{n} + 2a - 2a\sigma - \frac{3b(1-\sigma)}{2-\sigma} \geq 0$ ist.

Falls $n=1$ ist, wähle man $a=b=1$; dann ergibt sich für

$\sigma \geq \frac{1}{2}$:

$$R_1 \ll \{Q^2 T (\log QT)^3\}^{\frac{3(1-\sigma)}{2-\sigma}} (\log QT)^7,$$

$$R_2 \ll \{Q^2 T (\log QT)^3\}^{\frac{3(1-\sigma)}{2-\sigma}} (\log QT)^{\frac{13}{3}}.$$

Für $n \geq 2$ setze man

$$1 - \frac{a}{n} + 2a - 2a\sigma = \frac{3b(1-\sigma)}{2-\sigma},$$

$$\frac{n}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}a - \frac{2a}{3n} = b;$$

dann folgt nach kurzer Rechnung:

$$a = \frac{(n+1)\sigma - n}{4\sigma + \frac{\sigma}{n} - 2 - 2\sigma^2}$$

und

$$b = \frac{n+2}{3} + \frac{2}{3}(1 - \frac{1}{n})a.$$

$a = a(\sigma)$ ist für $1 - \frac{1}{2n} \leq \sigma \leq 1$ monoton wachsend wegen

$$a'(\sigma) = \frac{(n+1)(4\sigma + \frac{\sigma}{n} - 2 - 2\sigma^2) - ((n+1)\sigma - n)(4 + \frac{1}{n} - 4\sigma)}{(4\sigma + \frac{\sigma}{n} - 2 - 2\sigma^2)^2} \geq 0$$

$$\leftrightarrow 4(n+1)\sigma + \frac{\sigma}{n} - 2n - 2 - 2n\sigma^2 - 2\sigma^2 - (4(n+1)\sigma - 4n + \sigma + \frac{\sigma}{n} - 1 - 4(n+1)\sigma^2 + 4n\sigma) \geq 0$$

$$\leftrightarrow (2n+2)\sigma^2 - 4n\sigma + 2n - 1 \geq 0$$

$$\leftrightarrow (\sigma - \frac{n}{n+1})^2 + \frac{n-1}{2(n+1)^2} \geq 0.$$

Insbesondere ergibt sich:

$$\frac{n}{2} = a(1 - \frac{1}{2n}) \leq a(\sigma) = a \leq a(1) = n ,$$

$$\frac{2}{3}n + \frac{1}{3} \leq b \leq n .$$

Es bleibt noch zu zeigen: $a \leq b$.

$$a \leq b = \frac{n+2}{3} + \frac{2}{3}(1 - \frac{1}{n})a$$

$$\leftrightarrow 3a \leq n+2+2a - \frac{2a}{n} \quad \leftrightarrow \quad a(1 + \frac{2}{n}) \leq n+2$$

$$\leftrightarrow a \leq n .$$

Insgesamt erhält man aus (6.23) und (6.24):

$$\begin{aligned} \sum_{N_q \leq Q} \sum_{\chi \bmod q}^* N(\sigma, T, \chi) &<< (R_1 + R_2 + 1)(\log QT)^3 \\ &<< \{Q^2 T^b (\log QT)^{3n}\}^{\frac{3(1-\sigma)}{2-\sigma}} (\log QT)^{10}, \end{aligned}$$

wobei
$$b = \frac{n+2}{3} + \frac{2}{3}(1 - \frac{1}{n}) \frac{(n+1)\sigma - n}{4\sigma + \frac{\sigma}{n} - 2 - 2\sigma^2} .$$

Eine andere Abschätzung ergibt sich im Bereich

$$1 - \frac{1}{2n} \leq \sigma \leq 1 , \quad n \geq 2 ,$$

wenn man

$$1 - \frac{a}{n} + 2a - 2a\sigma - \frac{3b(1-\sigma)}{2-\sigma} = \frac{n}{3} + \frac{2}{3}a - \frac{2a}{3n} + \frac{2}{3} - b \geq 0$$

setzt.

Es folgt:

$$b(1 - \frac{3(1-\sigma)}{2-\sigma}) = \frac{n-1}{3} + a(2\sigma - \frac{4}{3} + \frac{1}{3n}) .$$

Man wähle $a=1$, dann folgt:

$$b = \frac{(2-\sigma)(n-5+6\sigma+n^{-1})}{6\sigma-3}.$$

$b = b(\sigma)$ ist für $1 - \frac{1}{2n} \leq \sigma \leq 1$ monoton fallend wegen

$$b'(\sigma) = \frac{(12-n+5-12\sigma-\frac{1}{n})(6\sigma-3)-(12-6\sigma)(n-5+6\sigma+\frac{1}{n})}{(6\sigma-3)^2} \leq 0$$

$$\leftrightarrow -36\sigma^2 + 36\sigma + 9 - 9n - \frac{9}{n} \leq 0$$

$$\leftrightarrow (\sigma - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4n} + \frac{1}{4n} \geq 0.$$

Insbesondere erhält man für $n \geq 2$:

$$1 \leq \frac{n}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3n} = b(1) \leq b(\sigma) \leq b(1 - \frac{1}{2n}) = \frac{n}{3} + \frac{5}{6} + \frac{1}{3n}.$$

Außerdem gilt: i) $b \leq \frac{n}{3} + \frac{5}{6} + \frac{1}{3n} \leq n \leftrightarrow 2n^2 + 5n + 2 \leq 6n^2$
 $\leftrightarrow 4n^2 - 5n - 2 \geq 0.$

ii) $\frac{n+2}{3} - \frac{2}{3n} + \frac{2}{3} - b \geq \frac{n+2}{3} - \frac{2}{3n} + \frac{2}{3} - b(1 - \frac{1}{2n})$
 $= \frac{n}{3} + \frac{4}{3} - \frac{2}{3n} - \frac{n}{3} - \frac{5}{6} - \frac{1}{3n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \geq 0.$

iii) $\frac{n+4}{3} - \frac{2}{3n} - b \leq \frac{n+4}{3} - \frac{2}{3n} - b(1)$
 $= \frac{n+4}{3} - \frac{2}{3n} - \frac{n}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3n} = 1 - \frac{1}{n}.$

Somit ergibt sich schließlich für $1 - \frac{1}{2n} \leq \sigma \leq 1, n \geq 2$:

$$\sum_{Nq \leq Q} \sum_{\chi \bmod q}^* N(\sigma, T, \chi) \ll T^{\frac{n+4}{3} - \frac{2}{3n} - b} \{Q^2 T^b (\log QT)^{3n}\}^{\frac{3(1-\sigma)}{2-\sigma}} (\log QT)^{10}$$

wobei $b = \frac{(2-\sigma)(n-5+6\sigma+n^{-1})}{6\sigma-3} \leq \frac{n}{3} + \frac{5}{6} + \frac{1}{3n}.$

Ein anderes Resultat erhält man, wenn Satz 3.2 anstelle von Satz 3.1 im vorigen Beweis benutzt wird.

Satz 6.2 : Es seien $Q \geq 1$, $T \geq 2$ reelle Zahlen.

Dann gilt im Bereich $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1$, $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{Nq \leq Q} \sum_{\chi \bmod q}^* N(\sigma, T, \chi) &<< \{Q^{\frac{8}{3}T^{\frac{n}{2}+1}} \log QT (Q+T^{\frac{n}{2}-1})^{\frac{1}{3}}\}^{\frac{3(1-\sigma)}{2-\sigma}} (\log QT)^9 \\ &<< \{Q^3 T^{\frac{2}{3}(n+1)} \log QT\}^{\frac{3(1-\sigma)}{2-\sigma}} (\log QT)^9. \end{aligned}$$

Beweis: Nach (6.10) gilt:

$$\sum_{Nq \leq Q} \sum_{\chi \bmod q}^* N(\sigma, T, \chi) << (R_1 + R_2 + 1) (\log QT)^3.$$

Der Beweis wird analog zu dem von Satz 6.1 geführt.
Zunächst ergibt sich

$$\sum_{\rho_1 \in \mathcal{R}_2} |\zeta_K^4(\frac{1}{2} + it_{\rho_1}, \chi_1)| << \{Q^3 T^{\frac{n}{2}+1} \log QT + Q^2 T^n\} (\log QT)^4.$$

Man verfährt dabei wie im Beweis zu Satz 5.1. Allerdings wird anstelle von Satz 3.1 jetzt der Satz 3.2 verwendet.

Mit (6.16) und Satz 3.2 erhält man somit die folgende Abschätzung für R_2 :

$$\begin{aligned} R_2 &<< Y^{\frac{2}{3} - \frac{4}{3}\sigma} (\log QT)^{\frac{4}{3}} \left\{ \sum_{\rho_1 \in \mathcal{R}_2} |\zeta_K^4(\frac{1}{2} + it_{\rho_1}, \chi_1)| \right\}^{\frac{1}{3}} \left\{ \sum_{\rho_1 \in \mathcal{R}_2} |M(\frac{1}{2} + it_{\rho_1}, \chi_1)| \right\}^{\frac{2}{3}} \\ (6.25) \quad &<< Y^{\frac{2}{3} - \frac{4}{3}\sigma} (\log QT)^{\frac{10}{3}} \{Q^3 T^{\frac{n}{2}+1} \log QT + Q^2 T^n\}^{\frac{1}{3}} \{Q^3 T^{\frac{n}{2}+1} \log QT + X\}^{\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

Die Abschätzung für R_1 folgt aus (6.12) und Satz 3.2:

$$\begin{aligned} R_1 &<< (\log QT)^3 \{Q^3 T^{\frac{n}{2}+1} \log QT + U\} \sum_{U \leq N\alpha \leq 2U} |D(\alpha)|^2 (N\alpha)^{-2\sigma} e^{-\frac{2N\alpha}{Y}} \\ &<< (\log QT)^6 \{Q^3 T^{\frac{n}{2}+1} \log QT U^{1-2\sigma} + U^{2-2\sigma}\} e^{-\frac{2U}{Y}} \\ &<< (\log QT)^6 \{Q^3 T^{\frac{n}{2}+1} \log QT X^{1-2\sigma} + Y^{2-2\sigma}\} . \end{aligned}$$

Man wähle $X = Q^3 T^{\frac{n}{2}+1} \log QT$,

$$Y = \{Q^{\frac{8}{3}} T^{\frac{n}{2}+1} \log QT (Q+T)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{3}\}^{\frac{3}{2(2-\sigma)}} ;$$

dann folgt:

$$\begin{aligned} R_1 &<< (\log QT)^6 \{ (Q^3 T^{\frac{n}{2}+1} \log QT)^{2-2\sigma} + (Q^{\frac{8}{3}} T^{\frac{n}{2}+1} \log QT (Q+T)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{3})^{\frac{3(1-\sigma)}{2-\sigma}} \} \\ &<< (\log QT)^6 \{ (Q^{\frac{8}{3}} T^{\frac{n}{2}+1} \log QT)^{\frac{3(1-\sigma)}{2-\sigma}} \{ (Q^{\frac{1}{3}})^{\frac{3(1-\sigma)}{2-\sigma}} + \\ &\quad + ((Q+T)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{3})^{\frac{3(1-\sigma)}{2-\sigma}} \} \} \\ &<< (\log QT)^6 \{ Q^{\frac{8}{3}} T^{\frac{n}{2}+1} \log QT (Q+T)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{3} \}^{\frac{3(1-\sigma)}{2-\sigma}} . \end{aligned}$$

Aus (6.25) ergibt sich für R_2 :

$$\begin{aligned} R_2 &<< Y^{\frac{2}{3}-\frac{4}{3}\sigma} (\log QT)^{\frac{10}{3}} \{Q^3 T^{\frac{n}{2}+1} \log QT + Q^2 T^n\}^{\frac{1}{3}} \cdot Q^2 T^{\frac{n}{3}+\frac{2}{3}} (\log QT)^{\frac{2}{3}} \\ &<< Y^{\frac{2}{3}-\frac{4}{3}\sigma} (\log QT)^{\frac{10}{3}} Q^{\frac{8}{3}} T^{\frac{n}{2}+1} \log QT (Q+T)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{3} \\ &<< \{Q^{\frac{8}{3}} T^{\frac{n}{2}+1} \log QT (Q+T)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{3}\}^{\frac{3(1-\sigma)}{2-\sigma}} (\log QT)^{\frac{10}{3}} . \end{aligned}$$

Insgesamt erhält man schließlich:

$$\sum_{Nq \leq Q} \sum_{\chi \bmod q}^* N(\sigma, T, \chi) \ll \{Q^{\frac{8}{3}} T^{\frac{n}{2}+1} \log QT (Q+T^{\frac{n}{2}-1})^{\frac{1}{3}}\}^{\frac{3(1-\sigma)}{2-\sigma}} (\log QT)^9 \\ \ll \{Q^3 T^{\frac{2}{3}(n+1)} \log QT\}^{\frac{3(1-\sigma)}{2-\sigma}} (\log QT)^9.$$

Unter Verwendung der Ergebnisse von Paragraph 4 ergibt sich die folgende Verallgemeinerung von (1.2).

Satz 6.3: $Q \geq 1$, $T \geq 2$ seien reelle Zahlen.

Es gilt im Bereich $\frac{3}{4} \leq \sigma \leq 1$, $n \geq 1$:

$$\sum_{Nq \leq Q} \sum_{\chi \bmod q}^* N(\sigma, T, \chi) \ll (Q^2 T^n)^{\frac{2(1-\sigma)}{\sigma}} (\log QT)^c,$$

wobei $c = \max \left\{ \frac{4(\sigma+1)}{2\sigma-1}, \frac{3n-\sigma(3n-2)+7}{\sigma} \right\}$.

Beweis: Nach (6.10) gilt:

$$\sum_{Nq \leq Q} \sum_{\chi \bmod q}^* N(\sigma, T, \chi) \ll (R_1 + R_2 + 1) \cdot (\log QT)^3.$$

Es soll zunächst R_1 abgeschätzt werden. Nach (6.11) existiert eine Zahl U , $X \leq U \leq Y^2$, so daß gilt:

$$(6.26) \quad \left| \sum_{U < N\alpha \leq 2U} c(\alpha) \chi(\alpha) (N\alpha)^{-\rho} e^{-\frac{N\alpha}{Y}} \right| \geq (9 \log Y)^{-1}$$

für $\gg R_1 (\log Y)^{-1}$ Nullstellen $\rho \in \mathcal{R}_1$.

Man setze $V = (9 \log Y)^{-1}$ und wende Satz 4.1 an.

$\mathcal{M}$ ist dabei die Menge aller $\rho \in \mathcal{R}_1$, für die (6.26) gilt.

Die Voraussetzungen von Satz 4.1 sind erfüllt für

$$(6.27) \quad X^{2\sigma-1} \geq A_1 (\log QT)^6 QT^{\frac{n}{2}},$$

wobei A_1 eine genügend große, nur vom Körper K abhängige Konstante ist.

Es folgt dann nämlich

$$\begin{aligned} QT^{\frac{n}{2}} \log QT \sum_{U < N\alpha \leq 2U} |c(\alpha)|^2 (N\alpha)^{-2\sigma} e^{-\frac{2N\alpha}{Y}} \\ \leq QT^{\frac{n}{2}} \log QT U^{-2\sigma} \sum_{U < N\alpha \leq 2U} (D(\alpha))^2 \\ \leq A_2 QT^{\frac{n}{2}} (\log QT)^4 X^{1-2\sigma} \\ \leq \frac{A_2}{A_1} (\log QT)^{-2} \leq \frac{A_2'}{A_1} V^2. \end{aligned}$$

Aus Satz 4.1 ergibt sich somit

$$\begin{aligned} (6.28) \quad R_1 &<< (\log Y) U V^{-2} \sum_{U < N\alpha \leq 2U} |c(\alpha)|^2 (N\alpha)^{-2\sigma} e^{-\frac{2N\alpha}{Y}} \\ &<< U^{2-2\sigma} e^{-\frac{2U}{Y}} (\log QT)^6 \\ &<< Y^{2-2\sigma} (\log QT)^6. \end{aligned}$$

Es wird jetzt eine Abschätzung für R_2 bewiesen.

V_1 sei ein positiver Parameter, dessen Wert später angegeben wird.

Man wähle wie in (6.14) zu jeder Nullstelle $\rho = \beta + i\gamma \in \mathfrak{A}_2$ eine reelle Zahl t_ρ mit der Eigenschaft

$$|\gamma - t_\rho| \leq \frac{1}{2}(\log QT)^2, \quad ,$$

für die $|\zeta_K(\frac{1}{2} + it_\rho, \chi) M(\frac{1}{2} + it_\rho, \chi)|$ maximal wird.

Dann folgt wie im Beweis zu Satz 6.1:

$$(6.29) \quad |\zeta_K(\frac{1}{2} + it_\rho, \chi) M(\frac{1}{2} + it_\rho, \chi)| \gg Y^{\sigma - \frac{1}{2}} (\log QT)^{-1}.$$

Man setze

$$\mathfrak{J}_1 = \{ \rho \in \mathfrak{A}_2 ; |\zeta_K(\frac{1}{2} + it_\rho, \chi)| \geq v_1 \}$$

$$\mathfrak{J}_2 = \{ \rho \in \mathfrak{A}_2 ; |\zeta_K(\frac{1}{2} + it_\rho, \chi)| < v_1 \}.$$

Nach Satz 5.1 ergibt sich

$$(6.30) \quad |\mathfrak{J}_1| \ll Q^2 \cdot T^n \cdot v_1^{-4} \cdot (\log QT)^{3n+5}.$$

Für jede Nullstelle $\rho \in \mathfrak{J}_2$ gilt nach (6.29):

$$|M(\frac{1}{2} + it_\rho, \chi)| \gg Y^{\sigma - \frac{1}{2}} v_1^{-1} (\log QT)^{-1}.$$

$|\mathfrak{J}_2|$ läßt sich deshalb mit Satz 4.1 abschätzen.

Die Voraussetzungen sind erfüllt für

$$(6.31) \quad Y^{2\sigma-1} \geq A_4 \cdot v_1^2 \cdot Q \cdot T^{\frac{n}{2}} \cdot (\log QT)^4, \quad ,$$

wobei A_4 eine geeignete, nur vom Körper K abhängige Konstante ist.

Es folgt dann nämlich

$$Q \cdot T^{\frac{n}{2}} \cdot \log QT \sum_{N_{\text{oc}} \leq X} (N_{\text{oc}})^{-1} \leq A_5 \cdot Q \cdot T^{\frac{n}{2}} \cdot (\log QT)^2$$

$$\leq \frac{A_5}{A_4} (\log QT)^{-2} V_1^{-2} Y^{2\sigma-1}.$$

Somit ergibt sich

$$|J_1| \ll X \cdot V_1^2 \cdot Y^{1-2\sigma} \cdot (\log QT)^2 \sum_{N_{\text{oc}} \leq X} (N_{\text{oc}})^{-1}$$

$$\ll X \cdot V_1^2 \cdot Y^{1-2\sigma} \cdot (\log QT)^3.$$

Insgesamt erhält man unter der Voraussetzung (6.31) :

$$(6.32) \quad R_2 = |J_1| + |J_2|$$

$$\ll Q^2 T^n V_1^{-4} \cdot (\log QT)^{3n+5} + X \cdot V_1^2 \cdot Y^{1-2\sigma} (\log QT)^3.$$

Man wähle $X^{2\sigma-1} = A_1 (\log QT)^6 Q T^{\frac{n}{2}}$

$$Y^{2\sigma-1} = A_4 V_1^2 Q T^{\frac{n}{2}} (\log QT)^4.$$

Die Bedingungen (6.27) und (6.31) sind dann erfüllt, und es folgt:

$$R_1 \ll (\log QT)^6 Y^{2-2\sigma}$$

$$\ll (\log QT)^6 \cdot \left\{ V_1^2 Q T^{\frac{n}{2}} (\log QT)^4 \right\}^{\frac{2-2\sigma}{2\sigma-1}}$$

$$\ll (\log QT)^6 \cdot \left\{ V_1^4 Q^2 T^n (\log QT)^8 \right\}^{\frac{1-\sigma}{2\sigma-1}}.$$

Für R_2 ergibt sich nach (6.32) :

$$R_2 \ll Q^2 T^n V_1^{-4} (\log QT)^{3n+5} + \left\{ Q T^{\frac{n}{2}} (\log QT)^6 \right\}^{\frac{1}{2\sigma-1}} Q^{-1} T^{-\frac{n}{2}} (\log QT)^{-1}$$

$$<< Q^{2T^n} V_1^{-4} (\log QT)^{3n+5} (QT^{\frac{n}{2}})^{\frac{1}{2\sigma-1}} (QT^{\frac{n}{2}})^{\frac{1-2\sigma}{2\sigma-1}} (\log QT)^{\frac{6}{2\sigma-1}-1}$$

$$(6.33) \quad << Q^{2T^n} V_1^{-4} (\log QT)^{3n+5} + (Q^{2T^n})^{\frac{1-\sigma}{2\sigma-1}} (\log QT)^{\frac{7-2\sigma}{2\sigma-1}}.$$

Man bestimme den Parameter V_1 so, daß gilt:

$$(\log QT)^6 \{V_1^4 Q^{2T^n} (\log QT)^8\}^{\frac{1-\sigma}{2\sigma-1}} = Q^{2T^n} V_1^{-4} (\log QT)^{3n+5}.$$

Es folgt:

$$(V_1^4)^{\frac{\sigma}{2\sigma-1}} = (Q^{2T^n})^{\frac{3\sigma-2}{2\sigma-1}} (\log QT)^{\frac{8\sigma-8}{2\sigma-1} + 3n-1}$$

$$V_1^4 = (Q^{2T^n})^{\frac{3\sigma-2}{\sigma}} (\log QT)^{\frac{8\sigma-8}{\sigma} + (3n-1)\frac{2\sigma-1}{\sigma}}.$$

Somit erhält man für R_1 und den ersten Summanden in (6.33) die folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} R_1 &<< Q^{2T^n} V_1^{-4} (\log QT)^{3n+5} \\ &= Q^{2T^n} (Q^{2T^n})^{\frac{2-3\sigma}{\sigma}} (\log QT)^{\frac{8-8\sigma-(3n-1)(2\sigma-1)+(3n+5)\sigma}{\sigma}} \\ &= (Q^{2T^n})^{\frac{2(1-\sigma)}{\sigma}} (\log QT)^{\frac{3n-\sigma(3n+1)+7}{\sigma}}. \end{aligned}$$

Wegen $\frac{1-\sigma}{2\sigma-1} \leq \frac{2(1-\sigma)}{\sigma} \iff \sigma \geq \frac{2}{3}$ ergibt sich schließlich

$$\sum_{Nq \leq Q} \sum_{x \bmod q}^* N(\sigma, T, x) << (Q^{2T^n})^{\frac{2(1-\sigma)}{\sigma}} (\log QT)^c,$$

wobei $c = \max \left\{ \frac{4(\sigma+1)}{2\sigma-1}, \frac{3n-\sigma(3n-2)+7}{\sigma} \right\}.$

Es sei $N(\sigma, T)$ die Anzahl der Nullstellen $\rho = \beta + i\gamma$ der Dedekindschen Zetafunktion $\zeta_K(s)$ im Bereich

$$\beta \geq \sigma, \quad |\gamma| \leq T.$$

Mit Hilfe von Satz 3.3 ergibt sich

Satz 6.4 : Es sei $T \geq 2$ eine reelle Zahl und

$$m(a, T) = \max_{\substack{\sigma \geq a \\ |t| \leq T \\ |s-1| \geq 1}} |\zeta_K(s)|.$$

Dann gilt für $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$ und $\sigma \geq \frac{1+a}{2}$

$$N(\sigma, T) \ll \{A_m(a, 4T)(\log T)^5\}^{\frac{2(1-\sigma)(3\sigma-1-2a)}{(2\sigma-1-a)(\sigma-a)}} (\log T)^9,$$

wobei A eine nur vom Körper K abhängige Konstante ist.

Beweis: Mit den gleichen Überlegungen, mit denen sich (6.10) ergibt, erhält man

$$N(\sigma, T) \ll (R_1 + R_2 + 1)(\log T)^3.$$

Der Residuensatz muß allerdings auf das Rechteck mit den Ecken $2 \pm iT$ und $(a-\sigma) \pm iT$ angewendet werden.

Es soll zunächst eine Abschätzung für R_1 angegeben werden.

Wie im Beweis zu Satz 6.1 existiert eine Zahl U , $X \leq U \leq Y^2$, mit der Eigenschaft

$$\left| \sum_{U < N_{\alpha} \leq 2U} c(\alpha) (N_{\alpha})^{-\rho} e^{-\frac{N_{\alpha}}{Y}} \right| \geq (9 \log Y)^{-1}, \quad |c(\alpha)| \leq D(\alpha),$$

für $\gg R_1 (\log Y)^{-1}$ Nullstellen $\rho \in \mathcal{R}_1$.

Man benutze die Bemerkung (4.3) mit $r=a$ und $V=(9\log Y)^{-1}$.

Die Voraussetzungen sind erfüllt, wenn

$$(6.34) \quad X^{2\sigma-1-a} \geq A_1 m(a,T)(\log T)^5 \quad \text{ist,}$$

wobei A_1 eine geeignete, nur vom Körper K abhängige Konstante ist.

Es folgt dann nämlich:

$$\begin{aligned} U^a m(a,4T) \sum_{U < N_{\alpha} \leq 2U} |c(\alpha)|^2 (N_{\alpha})^{-2\beta} e^{-\frac{2N_{\alpha}}{Y}} \\ \leq U^{a-2\sigma} m(a,4T) e^{-\frac{2U}{Y}} \sum_{U < N_{\alpha} \leq 2U} |c(\alpha)|^2 \\ \ll U^{1+a-2\sigma} m(a,4T) (\log U)^3 \\ \ll X^{1+a-2\sigma} m(a,4T) (\log T)^3 \\ \leq A_1^{-1} (\log T)^{-2} \ll A_1^{-1} V^2. \end{aligned}$$

Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} (6.35) \quad R_1 &\ll \log Y U V^{-2} \sum_{U < N_{\alpha} \leq 2U} |c(\alpha)|^2 (N_{\alpha})^{-2\sigma} e^{-\frac{2N_{\alpha}}{Y}} \\ &\ll (\log T)^6 U^{2-2\sigma} e^{-\frac{2U}{Y}} \\ &\ll (\log T)^6 Y^{2-2\sigma}. \end{aligned}$$

Eine Abschätzung für R_2 erhält man wie folgt.

Für jede Nullstelle $\rho = \beta + i\gamma \in \mathcal{R}_2$ sei t_ρ eine reelle Zahl mit der Eigenschaft

$$|\gamma - t_\rho| \leq \frac{1}{2}(\log T)^2,$$

für die $|\zeta_K(a+it_\rho) M(a+it_\rho)|$ maximal wird.

Nach [1] kann man annehmen, daß

$$\sigma < 1 - \frac{c}{\log T}$$

ist, wobei c eine nur vom Körper K abhängige Konstante ist.

Es folgt dann

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(a-\beta+iu)| du &\leq \frac{1}{\beta-a} \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(1+a-\beta+iu)| du \\ &\ll \frac{1}{\sigma-a} \left\{ \int_0^1 |\Gamma(1+a-\beta+iu)| du + \int_1^{\infty} e^{-\frac{\pi}{2}u} u^{\frac{1}{2}} du \right\} \\ &\ll \frac{1}{1-\sigma} \ll \log T . \end{aligned}$$

Somit erhält man aus (6.8)

$$|\zeta_K(a+it_p) M(a+it_p)| \gg Y^{\sigma-a} (\log T)^{-1}$$

und wegen $|t_p| \leq 4T$

$$|M(a+it_p)| \gg Y^{\sigma-a} \{m(a, 4T)(\log T)\}^{-1} .$$

Es existiert also eine Zahl V , $1 \leq V \leq X$, mit der Eigenschaft

$$\left| \sum_{V \leq N_{\alpha} \leq 2V} \mu(\alpha) (N_{\alpha})^{-a-it_p} \right| \gg Y^{\sigma-a} \{m(a, 4T)\}^{-1} (\log T)^{-2}$$

für $\gg R_2 (\log T)^{-1}$ Nullstellen $\rho \in \mathfrak{R}_2$.

Man benutze wieder die Bemerkung (4.3) mit $r=a$.

Die Voraussetzungen sind erfüllt für

$$(6.36) \quad Y^{2\sigma-2a} \geq A_2 (m(a, 4T))^3 X^{1-a} (\log T)^4 ,$$

wobei A_2 eine geeignete, nur vom Körper K abhängige Konstante ist.

Es folgt:

$$R_2 \ll \log T \vee Y^{2a-2\sigma} \{m(a, 4T)\}^2 (\log T)^4 \sum_{V \leq N\alpha \leq 2V} (N\alpha)^{-2a} \\ \ll X^{2-2a} Y^{2a-2\sigma} \{m(a, 4T)\}^2 (\log T)^5 .$$

Man setze

$$X^{2\sigma-1-a} = A_1 m(a, 4T) (\log T)^5 ,$$

$$Y^{2\sigma-2a} = A_2 (m(a, 4T))^3 X^{1-a} (\log T)^6 ;$$

dann sind (6.34) und (6.36) erfüllt, und es ergibt sich mit (6.35) :

$$R_1 \ll (\log T)^6 Y^{2-2\sigma} \\ \ll (\log T)^6 \{A_2 (m(a, 4T))^3 (\log T)^6\}^{\frac{2-2\sigma}{2\sigma-2a}} X^{\frac{(1-a)(2-2\sigma)}{2\sigma-2a}} \\ \ll (\log T)^6 \{A_2 (m(a, 4T)) (\log T)^5\}^{\frac{3(1-\sigma)}{\sigma-a}} \\ \{A_1 m(a, 4T) (\log T)^5\}^{\frac{(1-a)(1-\sigma)}{(\sigma-a)(2\sigma-1-a)}} \\ \ll (\log T)^6 \{A m(a, 4T) (\log T)^5\}^{\frac{3(1-\sigma)}{\sigma-a} + \frac{(1-a)(1-\sigma)}{(\sigma-a)(2\sigma-1-a)}} \\ \ll (\log T)^6 \{A m(a, 4T) (\log T)^5\}^{\frac{3(1-\sigma)(2\sigma-1-a) + (1-a)(1-\sigma)}{(\sigma-a)(2\sigma-1-a)}} \\ \ll (\log T)^6 \{A m(a, 4T) (\log T)^5\}^{\frac{2(1-\sigma)(3\sigma-1-2a)}{(\sigma-a)(2\sigma-1-a)}} .$$

Für R_2 erhält man die Abschätzung

$$R_2 \ll \{A_1 m(a, 4T) (\log T)^5\}^{\frac{2-2a}{2\sigma-1-a}} A_2^{-1} (m(a, 4T))^{-1} X^{a-1} \log T$$

$$\ll \{A_1 m(a, 4T)(\log T)^5\}^{\frac{2-2a}{2\sigma-1-a}} \{A_2 m(a, 4T)(\log T)^5\}^{-1} \\ (\log T)^6 \{A_1 m(a, 4T)(\log T)^5\}^{\frac{a-1}{2\sigma-1-a}}$$

$$\ll \{A m(a, 4T)(\log T)^5\}^{\frac{2-2\sigma}{2\sigma-1-a}} (\log T)^6$$

$$\ll \{A m(a, 4T)(\log T)^5\}^{\frac{2(1-\sigma)(3\sigma-1-2a)}{(\sigma-a)(2\sigma-1-a)}} (\log T)^6$$

wegen $1 \leq \frac{3\sigma-1-2a}{\sigma-a} \iff \sigma \geq \frac{1}{2}(1+a)$.

Insgesamt ergibt sich also

$$N(\sigma, T) \ll (R_1 + R_2 + 1) (\log T)^3 \\ \ll \{A m(a, 4T)(\log T)^5\}^{\frac{2(1-\sigma)(3\sigma-1-2a)}{(\sigma-a)(2\sigma-1-a)}} (\log T)^9.$$

Die Sätze 6.1 und 6.3 sind in der Einleitung als Satz A und Satz B zitiert.

7. Anhang:

Lemma 7.1: Für jeden primitiven Charakter χ der engeren Idealklassengruppe modulo $\mathfrak{o}$ und für $\sigma \leq -1$ gilt:

$$\zeta_K(\sigma+it, \chi) \ll \left\{ \frac{d}{(2\pi)^n} N\mathfrak{o} \cdot (3(1-\sigma)(|t|+1))^n \right\}^{\frac{1}{2}-\sigma};$$

dabei ist d die Diskriminante des Körpers K . Die auftretende $\ll$ -Konstante hängt nur vom Körper K ab.

Beweis:

Es gilt nach [8; Satz LXVI]:

$$\zeta_K(s, \chi) = f(s, \chi) \zeta_K(1-s, \bar{\chi}) \quad , \text{ wobei}$$

$$f(s, \chi) = (-i)^{q_W(\chi)} \left(\frac{(2\pi)^s}{2} \right)^n d^{\frac{1}{2}-s} (N\mathfrak{o})^{\frac{1}{2}-s} \left(\cos \frac{\pi s}{2} \right)^{-r_1+q-r_2} \cdot \left(\sin \frac{\pi s}{2} \right)^{-q-r_2} (\Gamma(s))^{-n},$$

$$|W(\chi)| = 1 \quad , \quad 0 \leq q \leq r_1 \quad , \quad r_1 + 2r_2 = n \quad .$$

Für $\sigma = \operatorname{Re} s \leq -1$ folgt:

$$(7.1) \quad \zeta_K(s, \chi) = \zeta_K(1-(1-s), \chi) = \frac{\zeta_K(1-s, \bar{\chi})}{f(1-s, \bar{\chi})} \ll \frac{1}{|f(1-s, \bar{\chi})|}$$

$$\ll \left(\frac{d}{(2\pi)^n} \right)^{\frac{1}{2}-\sigma} (N\mathfrak{o})^{\frac{1}{2}-\sigma} |\Gamma(1-s)|^n \left| \cos \frac{\pi(1-s)}{2} \right|^{r_1-q+r_2} \left| \sin \frac{\pi(1-s)}{2} \right|^{q+r_2}$$

$$<< \left(\frac{d}{(2\pi)^n} \right)^{\frac{1}{2}-\sigma} (Nq)^{\frac{1}{2}-\sigma} |\Gamma(1-s)|^n e^{\frac{n\pi}{2}|t|}.$$

Die letzte Zeile ergibt sich wegen

$$\begin{aligned} \left| \sin \frac{\pi(1-s)}{2} \right| &<< \left| e^{\frac{\pi(1-\sigma)i}{2}} e^{\frac{\pi}{2}t} - e^{-\frac{\pi(1-\sigma)i}{2}} e^{-\frac{\pi}{2}t} \right| \\ &<< e^{\frac{\pi}{2}|t|} \end{aligned}$$

$$\text{und} \quad \left| \cos \frac{\pi(1-s)}{2} \right| << e^{\frac{\pi}{2}|t|}.$$

Es soll jetzt eine Abschätzung für $|\Gamma(1-s)|$, $s=\sigma+it$, $\sigma \leq -1$, bewiesen werden.

Zunächst folgt nach [14; Anhang, Satz 6.1] für $\operatorname{Re}(1-s) \geq 2$:

$$\begin{aligned} \log \Gamma(1-s) &= \left(\frac{1}{2}-s\right) \log(1-s) - (1-s) + \frac{1}{2} \log 2\pi + O(|1-s|^{-1}) \\ &= \left(\frac{1}{2}-s\right) \log(1-s) - (1-s) + O(1). \end{aligned}$$

Man erhält also

$$(7.2) \quad |\Gamma(1-s)| << \left| e^{\left(\frac{1}{2}-s\right) \log(1-s)} \right| e^{\sigma-1}.$$

Für $|t| \leq 1$ ergibt sich

$$\begin{aligned} |\Gamma(1-s)| &<< \left| e^{\left(\frac{1}{2}-s\right) \log(1-s)} \right| \\ &= \left| e^{\left(\frac{1}{2}-\sigma-it\right) \{\log|1-s| + i \arg(1-s)\}} \right| \\ &= e^{\left(\frac{1}{2}-\sigma\right) \log|1-s|} e^{t \arg(1-s)} \\ &<< e^{\left(\frac{1}{2}-\sigma\right) \log 2(1-\sigma)} = \{2(1-\sigma)\}^{\frac{1}{2}-\sigma}. \end{aligned}$$

Für $t > 1$ gilt

$$\begin{aligned}\log(1-s) &= \log(-it) + \int_{-it}^{(1-\sigma)-it} \frac{dz}{z} \\ &= \log t - \frac{\pi}{2}i + \int_0^{1-\sigma} \frac{du}{u-it}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\left| \int_0^{1-\sigma} \frac{du}{u-it} \right| &\leq \left| \int_0^1 \frac{du}{u-it} \right| + \left| \int_1^{1-\sigma} \frac{du}{u-it} \right| \\ &\leq \frac{1}{t} + \int_1^{1-\sigma} \frac{du}{u} \leq 1 + \log(1-\sigma) \leq \log 3(1-\sigma).\end{aligned}$$

Somit folgt mit (7.2):

$$\begin{aligned}|\Gamma(1-s)| &<< |e^{(\frac{1}{2}-\sigma-it)(\log t - \frac{\pi}{2}i + \int_0^{1-\sigma} \frac{du}{u-it})}| e^{\sigma-1} \\ &= e^{(\frac{1}{2}-\sigma)\log t} e^{-\frac{\pi}{2}t} |e^{(\frac{1}{2}-\sigma) \cdot \int_0^{1-\sigma} \frac{du}{u-it}}| e^{-it \cdot \int_0^{1-\sigma} \frac{du}{u-it}} e^{\sigma-1} \\ &\leq e^{(\frac{1}{2}-\sigma)\log t} e^{-\frac{\pi}{2}t} e^{(\frac{1}{2}-\sigma)\log 3(1-\sigma)} e^{t \frac{1-\sigma}{t}} e^{\sigma-1} \\ &= \{3(1-\sigma)t\}^{\frac{1}{2}-\sigma} e^{-\frac{\pi}{2}t}.\end{aligned}$$

Analog erhält man für $t < -1$:

$$|\Gamma(1-s)| << \{3(1-\sigma)(-t)\}^{\frac{1}{2}-\sigma} e^{\frac{\pi}{2}t}.$$

Insgesamt ergibt sich

$$(7.3) \quad |\Gamma(1-s)| << \begin{cases} \{2(1-\sigma)\}^{\frac{1}{2}-\sigma} & \text{für } |t| \leq 1 \\ \{3(1-\sigma)|t|\}^{\frac{1}{2}-\sigma} e^{-\frac{\pi}{2}|t|} & \text{für } |t| > 1. \end{cases}$$

Aus (7.1) und (7.3) folgt schließlich:

$$\begin{aligned} \zeta_K(s, \chi) &<< \left(\frac{d}{(2\pi)^n} \right)^{\frac{1}{2}-\sigma} \cdot (Nq)^{\frac{1}{2}-\sigma} \cdot \{3(1-\sigma)(|t|+1)\}^{n(\frac{1}{2}-\sigma)} \\ &= \left\{ \frac{d}{(2\pi)^n} \cdot Nq \cdot (3(1-\sigma)(|t|+1))^n \right\}^{\frac{1}{2}-\sigma}. \end{aligned}$$

8.Literaturverzeichnis:

- [1] Fogels, E., On the zeros of Hecke's L-functions I, Acta Arith. 7, 1961-62, S. 87-106.
- [2] Hecke, E., Über die L-Funktionen und den Dirichlet-schen Primzahlsatz für einen beliebigen Zahlkörper, Göttinger Nachrichten, 1917, S. 299-318.
- [3] Huxley, M.N., The large sieve inequality for algebraic number fields II: Means of moments of Hecke zeta-functions, Proc. London Math. Soc., (3), 21, 1970, S. 108-128.
- [4] Huxley, M.N., The large sieve inequality for algebraic number fields III: Zero-density results, J. London Math. Soc. (2), 3, 1971, S. 233-240.
- [5] Landau, E., Vorlesungen über Zahlentheorie, Chelsea publishing company, New York.
- [6] Landau, E., Über die zu einem algebraischen Zahlkörper gehörige Zetafunktion und die Ausdehnung der Tschebyscheffschen Primzahlentheorie auf das Problem der Verteilung der Primideale, J. reine und angew. Math. 125, 1903, S. 64-188.
- [7] Landau, E., Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und Ideale, B.G. Teubner Verlag, 1918.
- [8] Landau, E., Über Ideale und Primideale in Idealklassen, Math. Zeitschrift 2, 1918, S. 52-154.

- [9] Landau, E., Verallgemeinerung eines Pólyaschen Satzes auf algebraische Zahlkörper, Göttinger Nachrichten 1918, S. 478-488.
- [10] Mitsui, T., Generalized prime number theorem, Jap. J. Math. 26, 1956, S. 1-42.
- [11] Montgomery, H.L., Means and large values of Dirichlet polynomials, Inventiones math. 8, 1969, S. 334-345.
- [12] Montgomery, H.L., Zeros of L-functions, Inventiones math. 8, 1969, S. 346-354.
- [13] Montgomery, H.L., Topics in multiplicative number theory, Lecture Notes in Mathematics, Band 227, 1971, Springer-Verlag.
- [14] Prachar, K., Primzahlverteilung, Springer-Verlag, 1957.

Lebenslauf

Am 28. Februar 1947 wurde ich in Rostrup (Niedersachsen) geboren. Meine Eltern sind der technische Angestellte Walter Hinz und seine Ehefrau Alma, geb. Stoffers.

Ich bin in Rostrup aufgewachsen und ging dort zur Volksschule. Von 1958 bis 1966 besuchte ich das Gymnasium in Westerstede und legte dort im Herbst 1966 das Abitur ab.

Zu Beginn des Wintersemesters 1966 begann ich an der Philipps-Universität in Marburg mit dem Studium der Mathematik und Physik. Am 8. November 1968 legte ich die Diplom-Vorprüfung und am 12. Februar 1971 die Diplom-Hauptprüfung in Mathematik ab.

Ich hörte Vorlesungen insbesondere bei den Herren Professoren Doebner, Gradmann, Grawert, Körner, Niemeyer, Richert, Schaal, H.A. Schmidt, Walcher und Wirsing.

Seit Februar 1971 bin ich als wissenschaftlicher Angestellter am Fachbereich Mathematik der Universität in Marburg tätig.

